Πανεπιστημιο Κρητης – Μαθηματικο Τμημα

Θέματα Ανάλυσης: Σεμινάριο Προβλημάτων

http://fourier.math.uoc.gr/~mk/probsem0001

Μιχάλης Κολουντζάκης και Σταύρος Παπαδόπουλος – Εαρινό εξάμηνο 2000-2001

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1

1. Βρείτε τα δύο τελευταία ψηφία των αριθμών

$$3^{1000} \text{ και } 4444^{4444}.$$

2. Έστω $a_1, a_2, \ldots$, θετικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη σχέση

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2, \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Είναι σωστό ότι $a_k = k$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots$;

3. Δείξτε ότι σε ένα χρόνο υπάρχει τουλάχιστον μια μέρα που είναι Τρίτη και 13.

4. Έστω $n \in \mathbb{N}$ σταθερό. Βρείτε $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε

$$n_1 + \cdots + n_k = n$$

και το γινόμενο $n_1 \cdots n_k$ να είναι το μέγιστο δυνατό.

5. Θεωρούμε 39 διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς. Να δειχθεί ότι υπάρχει ανάμεσά τους τουλάχιστον ένας που το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 11. Είναι το 39 το μικρότερο δυνατό νούμερο για το οποίο ισχύει το παραπάνω;

6. Δίδεται μια ζυγαριά σύγκρισης. Πόσα πρότυπα βάρη χρειαζόμαστε ώστε να μπορούμε να ζυγίσουμε όλα τα ακέραια βάρη από το 1 έως το n;
(α) βάζοντας πρότυπα βάρη στον ένα ζυγό της ζυγαριάς μόνο,
(β) βάζοντας πρότυπα βάρη ενδεχομένως και στους δυο ζυγούς της ζυγαριάς αν αυτό μας διευκολύνει.

7. Έστω $a_1, \ldots, a_{44}$ φυσικοί αριθμοί με $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{44} \le 125$. Δείξτε ότι τουλάχιστον μια από τις 43 διαφορές $b_i = a_{i+1} - a_i$ εμφανίζεται το λιγότερο 10 φορές.

Ηράκλειο, 30 Ιαν. 2001