Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων

Θέματα Ανάλυσης: Σεμινάριο Προβλημάτων

http://fourier.math.uoc.gr/˜mk/probsem0001

Μιχάλης Κολουντζάκης και Σταύρος Παπαδόπουλος – Εαρινό εξάμηνο 2000-2001

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2

1. Δίνεται η ακολουθία $x_1 = x_2 = 1$ και

$$x_{n+2} = x_{n+1}^2 - \frac{1}{2}x_n.$$

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας και αν ναι βρείτε το.

2. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$(2n+1)^n \geq (2n)^n + (2n-1)^n.$$

3. Έστω $x_0 = 0$, $x_1 = 1$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + nx_{n-1}}{n+1}.$$

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας και αν ναι βρείτε το.

4. Βρείτε το

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y}\int_0^\pi \tan(y\sin x)\,dx.$$

5. Αν $a_n > 0$ για $n \in \mathbb{N}$ και $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ τότε $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = a$.

6. Δίνεται ακολουθία a_n με $a_n > 0$ για $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $b_n = \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία b_{n_k} τ.ώ. $b_{n_k} \to \gamma$ με $\gamma \geq e$. (Ή, με άλλη ορολογία, $\limsup b_n \geq e$.)

7. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι σταθερή.

Ηράκλειο, 8 Φεβ. 2001