Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων

Θέματα Ανάλυσης: Σεμινάριο Προβλημάτων

`http://fourier.math.uoc.gr/~mk/probsem0001`

Μιχάλης Κολουντζάκης και $\boxed{\text{Σταύρος Παπαδόπουλος}}$ – Εαρινό εξάμηνο 2000-2001

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3

1. Θεωρούμε μια συλλογή από κλειστά τετράγωνα συνολικού εμβαδού ≥ 3. Δείξτε ότι με αυτά τα τετράγωνα μπορούμε να καλύψουμε ένα μοναδιαίο τετράγωνο. Επίσης να δειχθεί ότι το 3 είναι ο μικρότερος πραγματικός αριθμός για τον οποίο συμβαίνει αυτό.

2. Θεωρούμε μια συλλογή από κλειστά τετράγωνα συνολικού εμβαδού $\leq 1/2$. Να δειχθεί ότι μπορούμε να τα τοποθετήσουμε μέσα στο μοναδιαίο τετράγωνο ώστε να μην αλληλοκαλύπτονται. Το $1/2$ είναι το καλύτερο δυνατό.

3. Έστω $T(N)$ ο αριθμός των τριγώνων με πλευρές ακέραιους αριθμούς και περίμετρο N. Αν ο $N \geq 6$ είναι άρτιος να δειχθεί ότι

$$T(N) = T(N-3).$$

4. Δίνονται n σημεία στο επίπεδο που δε βρίσκονται όλα επ' ευθείας. Να δειχθεί ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο από αυτά ώστε η ευθεία που ορίζουν να μην περιέχει άλλο σημείο.

5. Δίνεται τετράγωνο $ABCD$. Θεωρούμε σημείο P μέσα στο τετράγωνο ώστε $\widehat{PAB} = \widehat{PBA} = 15^o$. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο DCP είναι ισόπλευρο.

6. Δίνεται $A \subseteq \mathbb{N}$, μη κενό, με τις ιδιότητες:

1. $a, b \in A$ συνεπάγεται $a + b \in A$.
2. Αν $n \in \mathbb{N}$ και $n|a$ για κάθε $a \in A$ τότε $n = 1$.

Να δειχθεί:

1. Υπάρχουν $a, b \in A$ τέτοια ώστε $(a, b) = 1$.
2. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\{n_0, n_0 + 1, \ldots\} \subseteq A$.

7. Έστω ένα πολυώνυμο $P(x, y)$ με την ιδιότητα ότι για κάθε στροφή $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ισχύει $P(\sigma(x, y)) = P(x, y)$. Να δειχθεί ότι το P είναι της μορφής

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x^2 + y^2)^k.$$

8. Δείξτε ότι δε μπορούμε να χωρίσουμε τους φυσικούς αριθμούς σε πεπερασμένες το πλήθος αριθμητικές προόδους με διαφορετικούς λόγους η κάθε μία.

9. Εξετάστε αν υπάρχει $A \subseteq \mathbb{N}$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε κάθε $n \geq n_0$ να γράφεται σαν άθροισμα δύο στοιχείων του A και ο αριθμός των τρόπων που γράφεται να είναι ο ίδιος για όλα τα $n \geq n_0$.

10. Έστω $a, b \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι μόνο πεπερασμένοι από τους αριθμούς

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^n + \left(b + \frac{1}{2}\right)^n$$

μπορεί να είναι φυσικοί.

Ηράκλειο, 22 Φεβ. 2001