Πανεπιστημιο Κρητησ – Τμημα Μαθηματικων

Θέματα Ανάλυσης: Σεμινάριο Προβλημάτων

http://fourier.math.uoc.gr/~mk/probsem0001

Μιχάλης Κολουντζάκης και $\boxed{\text{Σταύρος Παπαδόπουλος}}$ – Εαρινό εξάμηνο 2000-2001

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 4

1. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Να βρεθεί το πλήθος των ακεραίων μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης $x + 2y + 2z = n$.

2. Πόσες ακέραιες λύσεις έχει η ανίσωση $|x| + |y| < 100$;

3. Έστω $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, διαφορετικά ανά δύο, και το πολυώνυμο $f(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n) - 1$. Να δειχθεί ότι το $f(x)$ είναι ανάγωγο στους ακεραίους.

4. Έστω $n \geq 3$. Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^n + x^2 + 5$ είναι ανάγωγο στους ακεραίους.

5. Έστω $f(x)$ ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές τέτοιο ώστε $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν πολυώνυμα $f_1(x)$ και $f_2(x)$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = f_1^2(x) + f_2^2(x)$.

6. Έστω $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.
(α) Δείξτε ότι υπάρχει $A \subseteq \{1, \cdots, n\}$ τέτοιο ώστε

$$\left| \sum_{k \in A} z_k \right| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

(β) Δείξτε ότι το $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ μπορεί να αντικατασταθεί με το $\frac{1}{\pi}$ στην προηγούμενη ανισότητα.

7. Έστω $n_1 < \cdots < n_k$ φυσικοί αριθμοί και $A = \{n_1, \ldots, n_k\}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $B \subseteq A$ τέτοιο ώστε αν θέσουμε

$$f(x) = \sum_{m \in B} \cos mx$$

τότε $-\min_{x \in [0, 2\pi)} f(x) \geq \frac{1}{\pi} k$.

8. Έστω $n_1 < \cdots < n_k$ φυσικοί αριθμοί και $f(x) = \sum_{m=1}^{k} \cos n_m x$, $M = -\min_{x \in [o, 2\pi]} f(x)$.
(α) Να δειχθεί ότι $M \geq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx$.
(β) Να δειχθεί ότι $M \geq \frac{1}{4}$.

Ηράκλειο, 7 Μαρτίου 2001