Πανεπιστημιο Κρητησ – Τμημα Μαθηματικων

Θέματα Ανάλυσης: Σεμινάριο Προβλημάτων

http://fourier.math.uoc.gr/~mk/probsem0001

Μιχάλης Κολουντζάκης και $\boxed{\text{Σταύρος Παπαδόπουλος}}$ – Εαρινό εξάμηνο 2000-2001

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 5

1. Έστω $a, b \in \mathbb{N}$, $(a,b) = 1$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε $N(k)$ τον αριθμό των μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης $ax + by = k$. Δείξτε ότι $\lim_{k\to\infty} \frac{N(k)}{k} = \frac{1}{ab}$.

2. Δίνεται μια άπειρη αριθμητική πρόοδος που αποτελείται από φυσικούς. Δείξτε ότι αν ένας όρος της προόδου είναι τέλειο τετράγωνο τότε υπάρχουν άπειροι όροι που είναι τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

3. Δίνεται μια γνησίως αύξουσα μη φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών $a_1, a_2, \ldots$. Δείξτε ότι για $a > 0$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $k \geq k_0$ συνεπάγεται

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - a.$$

4. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_k$ τέτοια ώστε $x_i \in \{1, 0, -1\}$. Θέτουμε $S = \sum_{i<j} x_i x_j$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του S.

5. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και $|f(z) - f(w)| = |z - w|$ για όλα τα $z \in \mathbb{C}$ και $w \in \{0, 1, i\}$. Δείξτε ότι είτε $f(z) = f(1)z$ είτε $f(z) = f(1)\overline{z}$.

6. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, και $f(x)$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f^{2n+1}(x) + f(x) - x = 0, \quad (x \geq 0).$$

Υπολογίστε το $\int_0^x f(t)\,dt$.
(*Υπόδειξη:* Θεωρείστε δεδομένο ότι η f παραγωγίζεται.)

7. Έστω $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $n_1 < \cdots < n_k < \cdots$ φυσικοί τέτοιοι ώστε

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}.$$

Ηράκλειο, 14 Μαρτίου 2001