Πανεπιστημιο Κρητησ – Τμημα Μαθηματικων

Θέματα Ανάλυσης: Σεμινάριο Προβλημάτων

`http://fourier.math.uoc.gr/~mk/probsem0001`

Μιχάλης Κολουντζάκης και Σταύρος Παπαδόπουλος – Εαρινό εξάμηνο 2000-2001

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 6

1. Συγκλίνει ή όχι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{n+1}{n}}$;

2. Υπάρχει ή όχι άπειρη ακολουθία $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ τέτοια ώστε για κάθε $i \neq j$ ισχύει $|a_i - a_j| \geq 1$ και $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-3} = +\infty$;

3. Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} n^{-3/2} \sum_{j=1}^{6n} \sqrt{j}$.

4. Δίδεται μια ακολουθία $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, με $\int_{-\infty}^{\infty} |f_n|^2 < \infty$, και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τ.ώ. $\int_{-\infty}^{\infty} |f_n - f|^2 \to 0$, για $n \to \infty$. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| |f_n|^2 - |f|^2 \right| \to 0.$$

5. Δίδεται συνεχής, μη αρνητική f ορισμένη στο επίπεδο, με ολοκλήρωμα ίσο με $\alpha > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$ ισχύει

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} f(x - \nu) \leq \alpha.$$

Υποθέσετε επίσης ότι η f έχει *φραγμένο φορέα*, μηδενίζεται δηλαδή έξω από ένα δίσκο $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq R\}$. Δείξτε τότε ότι η παραπάνω ισότητα είναι στην πραγματικότητα ισότητα για όλα τα $x \in \mathbb{R}^2$.

6. Έστω $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

όπου $a_n = \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$.
Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι αυτό ισχύει για τη (μη συνεχή) συνάρτηση $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$, όπου $[a, b]$ είναι τυχόν υποδιάστημα του $[0, 2\pi]$. Προσεγγίστε την τυχούσα συνεχή συνάρτηση με κλιμακωτές συναρτήσεις. Ποια η σχέση του $|a_n|$ με το $\int_0^{2\pi} |f|$;

7. Με το συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου, υποθέστε επιπλέον ότι η f είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος της είναι επίσης συνεχής στο $[0, 2\pi]$. Δείξτε ότι υπάρχει μια θετική σταθερά C (εξαρτάται από την f αλλά όχι από το n) τ.ώ.

$$|a_n| \leq \frac{C}{n}, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ηράκλειο, 20 Απριλίου 2001