Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων

Θέματα Ανάλυσης: Σεμινάριο Προβλημάτων

Μιχάλης Κολουντζάκης – Εαρινό εξάμηνο 1999-2000

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3

1. Ένα υποσύνολο K του Ευκλείδιου χώρου λέγεται *κυρτό* αν για κάθε $x, y \in K$ ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν περιέχεται στο K. Με άλλα λόγια

$$\lambda \in [0,1] \text{ και } x, y \in K \Longrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in K.$$

(α) Δείξτε ότι αν το κυρτό πολύγωνο P_1 περιέχει στο εσωτερικό του το επίσης κυρτό πολύγωνο P_2 τότε η περίμετρος του P_2 είναι το πολύ όση και του P_1.
(β) Ομοίως, αν το κυρτό πολύεδρο P_1, στον τρισδιάστατο χώρο, περιέχει το κυρτό πολύεδρο P_2, τότε η επιφάνεια του P_2 είναι το πολύ όση και του P_1.

2. Δίδονται δύο ορθογώνια παραλληλεπίπεδα στον τρισδιάστατο χώρο, όχι κατ΄ ανάγκη παράλληλα με τους άξονες, που το ένα περιέχει το άλλο. Δείξτε ότι το άθροισμα των μηκών των ακμών του μέσα ορθογωνίου είναι το πολύ όσο και του απ΄ έξω.

3. Ένα σημείο ενός κυρτού συνόλου λέγεται *ακραίο* αν δεν περιέχεται στο εσωτερικό κανενός ευθυγράμμου τμήματος με άκρα δύο σημεία του συνόλου. Ένα $x \in K$ δηλ., λέγεται ακραίο αν και μόνο αν δεν υπάρχουν y και z στο K, διαφορετικά από το x, και $\lambda \in (0,1)$, ώστε $x = \lambda y + (1-\lambda)z$. Για παράδειγμα, τα ακραία σημεία ενός κυρτού πολυγώνου είναι οι κορυφές του, του κλειστού δίσκου είναι ολόκληρη η περιφέρεια και ενός κυκλικού κυλίνδρου είναι οι περιφέρειες των δύο βάσεων. Ο ανοιχτός δίσκος δεν έχει ακραία σημεία.

(α) Δείξτε ότι κάθε συμπαγές (δηλ. κλειστό και φραγμένο) κυρτό υποσύνολο του επιπέδου έχει κάποιο ακραίο σημείο.
(β) Δείξτε επίσης ότι κάθε σημείο ενός συμπαγούς κυρτού στο επίπεδο γράφεται, όχι κατ΄ ανάγκη με μοναδικό τρόπο, σα *κυρτός συνδυασμός* τριών ακραίων σημείων του συνόλου.

Κυρτός συνδυασμός κάποιων διανυσμάτων είναι ένας γραμμικός συνδυασμός όπου όλοι οι συντελεστές είναι μη αρνητικοί και το άθροισμά τους είναι 1. Είναι πολύ εύκολο να δείξετε (κάντε το) ότι αν τα διανύσματα αυτά ανήκουν σε ένα κυρτό σώμα, θα ανήκει επίσης και ο κυρτός συνδυασμός τους.

4. (α) Αν K είναι ένα συμπαγές κυρτό σύνολο στο επίπεδο και $x \notin K$ τότε υπάρχει μια ευθεία του επιπέδου που διαχωρίζει το x από το K.
(β) Αν K και L είναι δύο ξένα μεταξύ τους συμπαγή κυρτά του επιπέδου τότε υπάρχει μια ευθεία του επιπέδου που διαχωρίζει τα δύο σύνολα.

5. Κατασκευάσετε μια συνεχή συνάρτηση

$$f : [0,1] \to [0,1]^2$$

που να είναι επί (μια τέτοια συνάρτηση λέγεται συνήθως καμπύλη του Peano).

6. Να βρεθεί μια συνεχής συνάρτηση

$$f : [0,1] \to [0,1]$$

τέτοια ώστε για κάθε $y \in [0,1]$ να υπάρχουν άπειρα $x \in [0,1]$ με $f(x) = y$.

7. Συμβολίζουμε με S^2 την επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας στο $\mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι για κάθε συνεχή

$$f : S^2 \to \mathbb{R}^2$$

υπάρχει $x \in S^2$ τέτοιο ώστε $f(x) = f(-x)$.

8. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Μια συλλογή από διαστήματα I_j, $j = 1, 2, \ldots$, αποτελεί μια κάλυψη του E αν $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Το *μήκος* της κάλυψης είναι ο αριθμός (πεπερασμένος ή $+\infty$) $L = \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|$, όπου $|I|$ συμβολίζει το μήκος του διαστήματος I. Συμβολίζουμε με $\mu^*(E)$ το infimum των αριθμών L, για όλες τις δυνατές καλύψεις του συνόλου E. Ο αριθμός $\mu^*(E)$ ονομάζεται *εξωτερικό μέτρο* του συνόλου E.

(α) Δείξτε αν E είναι αριθμήσιμο τότε $\mu^*(E) = 0$.
(β) Δείξτε ότι η συνολοσυνάρτηση μ^* είναι *υποπροσθετική*, δηλ., για κάθε δύο σύνολα A και B έχουμε

$$\mu^*(A \cup B) \le \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

(γ) Κατασκευάσετε ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο με μέτρο 0.

Ηράκλειο, ♡ (14 Φεβ.) 2000