Η Πιθανοθεωρητική Μέθοδος

Θερινό Σχολείο 2010

Διάλεξη 1η

Μιχάλης Κολουντζάκης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Ηράκλειο, Ιούλιος 2010

Οι πιθανότητες μας δημιουργούν προβλήματα

- Σε διάφορους υπολογισμούς τα δεδομένα υπόκεινται σε τυχαίο "θόρυβο".
- Στην ίδια τη φύση οι πιθανότητες είναι αναπόσπαστο μέρος της πραγματικότητας (κβαντική φυσική, στατιστική μηχανική)
- Μοντελοποιούμε με πιθανότητες την άγνοιά μας.
- Μοντελοποιούμε με πιθανότητες την αδυναμία μας να προβλέψουμε μια απολύτως γνωστή εξέλιξη (χάος). $\triangleleft$

Οι πιθανότητες μας λύνουν προβλήματα

- Δεν πάμε όλοι μαζί για φαγητό στο εστιατόριο.
- Ποιος θα παίξει πρώτος στο παιχνίδι; Ρίχνουμε κλήρο.
- Όταν ένας υπολογιστής πάει να "μιλήσει" στο δίκτυο και το βρει κατειλημμένο τότε περιμένει μια τυχαία περίοδο και μετά ξαναπροσπαθεί.
- Τα χαρακτηριστικά των απογόνων μας δεν είναι προκαθορισμένα.
- Πώς να διανείμουμε αγαθά με "δίκαιο" τρόπο. (Π.χ. σπίτια του Οργ. Εργατικής Κατοικίας)
- Πώς να βρούμε ποιο κόμμα θα κερδίσει τις εκλογές. $\triangleleft$

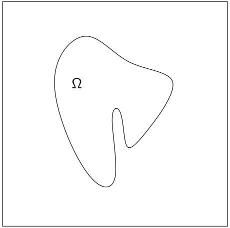
Για ζέσταμα: Τρία κλειστά κουτιά με ένα δώρο

- Έχετε μπροστά σας τρία κλειστά κουτιά. Ένα από αυτά έχει ένα δώρο.
  Εγώ ξέρω σε ποιο κουτί είναι.
- Επιλέγετε ένα κουτί. Είμαι υποχρεωμένος να σας ανοίξω ένα άλλο άδειο. (Πάντα υπάρχει.)
- Σας δίνω μια τελευταία ευκαιρία: μήπως θέλετε να αλλάξετε το κουτί που επιλέξατε στην αρχή;
- Τι θα κάνετε;
  $\triangleleft$

Τρία κλειστά κουτιά με ένα δώρο. Λύση.

- 3 στρατηγικές να παίξετε:
  (α) Μένετε στο ίδιο κουτί
  (β) Ξαναδιαλέγετε στην τύχη ανάμεσα στα δύο κλειστά κουτιά
  (γ) Αλλάζετε κουτί.
- (α) $\mathbb{P}\left[\text{Επιτυχία}\right] = 1/3$
- (β) $\mathbb{P}\left[\text{Επιτυχία}\right] = 1/2$.
- (γ) $\mathbb{P}\left[\text{Επιτυχία}\right] = \mathbb{P}\left[\text{Την 1η φορά δείχνετε άδειο}\right] = 2/3$
- Άρα παίζετε με τη (γ) στρατηγική και αλλάζετε πάντα.
  $\triangleleft$

Παράδειγμα: η μέθοδος Monte-Carlo για εύρεση εμβαδού



Πώς θα βρούμε το εμβαδό ενός σχήματος $\Omega \subseteq [0,1]^2$;
Μπορούμε να αποφασίζουμε πότε ένα σημείο είναι μέσα ή όχι.

Ρίχνουμε πολλά τυχαία σημεία ομοιόμορφα στο $[0,1]^2$.

Νόμος Μεγάλων Αριθμών: $|\Omega| \sim \dfrac{\text{Πόσα σημεία έπεσαν μέσα στο } \Omega}{\text{Πόσα σημεία ρίξαμε}}$

Αλλά πόσα σημεία πρέπει να ρίξουμε;

Monte-Carlo: μια απλή ανάλυση

$Y_1, \ldots, Y_N$ τυχαία σημεία στο $[0,1]^2$, ομοιόμορφα, ανεξάρτητα.

$X_j = \mathbf{1}(Y_j \in \Omega) = 1$ αν $Y_j \in \Omega$ αλλιώς 0

$S = \frac{1}{N}(X_1 + \cdots + X_N) =$ ποσοστό σημείων που έπεσαν μέσα

- Μέση τιμή: $\mathbb{E}S = \frac{1}{N}(\mathbb{E}X_1 + \cdots + \mathbb{E}X_N) = \mathbb{E}X_1 = \mathbb{P}[X_1 = 1] = |\Omega|$
- Διασπορά: $\sigma^2(S) = \frac{1}{N^2}(\sigma^2(X_1) + \cdots + \sigma^2(X_N)) =$
  $\frac{1}{N}\sigma^2(X_1) = \frac{1}{N}|\Omega|(1-|\Omega|) \le \frac{1}{N}$

Άρα $\sigma(S) \le \frac{1}{\sqrt{N}}$ (τυπική απόκλιση της S)

Μέση τιμή της S είναι αυτό που πρέπει και τυπική απόκλιση $\to 0$

Πιθανότητα απόκλισης από τη μέση τιμή

Θεώρημα (Ανισότητα Chebyshev)

$B = \{|S - \mathbb{E}S| > \lambda\}$ *(κακό ενδεχόμενο). Τότε* $\mathbb{P}[B] \le \frac{\sigma^2(S)}{\lambda^2}$.

Έστω ότι επιθυμούμε απόκλιση έως λ με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - \epsilon$.

Αρκεί τότε $\frac{1}{N\lambda^2} \le \epsilon$ ή $N \ge \frac{1}{\epsilon\lambda^2}$.

Π.χ. αν θέσουμε $\lambda = 10^{-3}, \epsilon = 1\%$ τότε αρκεί $N \ge 10^8$.

Θα δούμε αργότερα ότι αυτή η εκτίμηση για το N είναι πολύ μεγάλη και αρκεί πολύ μικρότερο N.

Θα χρησιμοποιήσουμε γι΄ αυτό διαφορετική ανισότητα από την Chebyshev.

Παράδειγμα: Πώς να ελέγξετε γινόμενο πινάκων $AB = C$

A, B, C είναι $N \times N$ πίνακες (με $N = 10^5$ για παράδειγμα).

Θέλουμε να ελέγξουμε αν $AB = C$.

Ελέγχοντας αν $C_{ij} = \sum_{k=1}^{N} A_{ik} B_{kj}$ για κάθε i, j παίρνει χρόνο $\sim N^3 = 10^{15}$.

Εναλλακτικός έλεγχος: Παράγουμε τυχαίο διάνυσμα r με N ανεξάρτητα στοιχεία τ.ώ. $\mathbb{P}\left[r_i = 0\right] = \mathbb{P}\left[r_i = 1\right] = 1/2$.

Αν $ABr = Cr$ τότε θεωρούμε ότι $AB = C$ αλλιώς ότι $AB \neq C$.

Το ABr υπολογίζεται ως $A(Br)$ και παίρνει χρόνο $O(N^2)$.

Ποια η πιθανότητα να κάνουμε λάθος;

Γινόμενο πινάκων: πιθανότητα σφάλματος

Αν $AB \neq C$ τότε ενδέχεται να κάνουμε λάθος.
Έστω $D = AB - C \neq 0$ και $r \in \{0,1\}^N$ τυχαίο διάνυσμα.

Κάποιο $D_{ab} \neq 0$. Ποια η πιθανότητα $(Dr)_a = 0$;

Το πολύ $1/2$: αν r τέτοιο ώστε $(Dr)_a = \sum_{k=1}^N D_{ak} r_k = 0$ τότε το:

$$r' : \quad r'_i = r_i \text{ αν } i \neq b \text{ αλλιώς } r'_i = 1 - r_i,$$

δίνει $(Dr')_a \neq 0$.

Κόστος του ελέγχου $ABr = Cr$ είναι $\sim N^2 = 10^{10}$.

Για πιθανότητα σφάλματος $\leq 2^{-k}$ επαναλαμβάνουμε k ανεξάρτητες φορές.

Συνολικό κόστος $\sim kN^2 \sim k10^{10}$.
$k = 10$ (πιθανότητα σφάλματος $\leq 2^{-10} = \frac{1}{1024} \leq \frac{1}{1000}$) κοστίζει $\sim 10^{11}$

Μέθοδος μετρήματος: διάφορες μορφές

$m > n$ αντικείμενα ανήκουν σε n κλάσεις $\Longrightarrow$ κάποια δύο αντικείμενα είναι της ίδιας κλάσης.

Παράδειγμα Σε ένα δωμάτιο υπάρχουν N άτομα. Τότε ανάμεσά τους υπάρχουν δύο με τον ίδιο αριθμό γνωριμιών μέσα στο δωμάτιο.

Παρατήρηση: δε μπορεί να υπάρχει κάποιος με $N-1$ γνωριμίες και κάποιος με 0 γνωριμίες.

Επειδή ο αριθμός των γνωριμιών κάποιου είναι από 0 έως $N-1$ έπεται ότι κάποια δύο άτομα έχουν τον ίδιο αριθμό.

$\triangleleft$

Μέθοδος μετρήματος: διάφορες μορφές

Υπεραριθμήσιμα αντικείμενα ανήκουν σε αριθμήσιμες κλάσεις (είδη)
$\Longrightarrow$ κάποια δύο αντικείμενα είναι της ίδιας κλάσης.

Παράδειγμα: Υπάρχουν συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που δεν είναι υπολογίσιμες από κάποιο πρόγραμμα.

Πλήθος των συναρτήσεων υπεραριθμήσιμο (ακόμα και οι $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$)
(απόδειξη: διαγώνιο επιχείρημα του Cantor)

Πλήθος προγραμμάτων αριθμήσιμα:
πρόγραμμα = κείμενο = πεπερασμένη ακολουθία από γράμματα, αριθμούς, σημεία στίξης
$\triangleleft$

Μέθοδος μετρήματος: διάφορες μορφές

Υπεραριθμήσιμα αντικείμενα ανήκουν σε αριθμήσιμες κλάσεις (είδη) $\Longrightarrow$ κάποια δύο αντικείμενα είναι της ίδιας κλάσης.

Παράδειγμα:

Αλγεβρικοί αριθμοί: Είναι οι ρίζες πολυωνύμων με ακεραίους συντελεστές. Π.χ. οι $\sqrt{2}, 5^{1/3}, \sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι αλγεβρικοί;

Οι πραγματικοί αριθμοί είναι υπαραριθμήσιμοι

Τα πολυώνυμα με $\mathbb{Z}$-συντελεστές είναι αριθμήσιμα. Κάθε ένα έχει πεπερασμένες ρίζες.
$\Rightarrow$ Οι ρίζες αυτών είναι αριθμήσιμες.

Άρα υπάρχουν μη αλγεβρικοί (*υπερβατικοί*) αριθμοί.

Μέθοδος μετρήματος: διάφορες μορφές (μέσοι όροι)

Αν $a_j \in \mathbb{R}$ και $\frac{1}{N}(a_1 + \cdots + a_N) \geq \lambda$ τότε υπάρχει j ώστε $a_j \geq \lambda$.

Σε ολοκληρωτική μορφή:

Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \geq \lambda$$

τότε υπάρχει $x \in [a, b]$ ώστε $f(x) \geq \lambda$.

Παράδειγμα:

Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τ.ώ. $|\sin x| + |\sin(x+1)| \geq \frac{4}{\pi} = 1.27\cdots$.

Έχουμε $\int_0^{2\pi} |\sin(x+1)\, dx| = \int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx = 2\int_0^{\pi} \sin x = 4$.

$f(x) = |\sin x| + |\sin(x+1)|$ έχει ολοκλήρωμα 8 στο $[0, 2\pi]$

Άρα υπάρχει $x \in [0, 2\pi]$ με $f(x) \geq \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}$.