Η Πιθανοθεωρητική Μέθοδος

Θερινό Σχολείο 2010

Διάλεξη 4η

Μιχάλης Κολουντζάκης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Ηράκλειο, Ιούλιος 2010

Εκθετική ανισότητα απόκλισης (Chernoff)

$X_1, \ldots, X_N$ ανεξάρτητες τ.μ. με τιμές 0 ή 1 (δείκτριες τ.μ.) και $S = X_1 + \cdots + X_N$, $\mu = \mathbb{E}S$. Για $\epsilon > 0$ έχουμε

$$\mathbb{P}\left[|S-\mu| \geq \epsilon\mu\right] \leq 2e^{-c_\epsilon \mu},$$

όπου

$$0 < c_\epsilon = \min\left\{\epsilon^2/2, -\ln\left(e^\epsilon(1+\epsilon)^{-(1+\epsilon)}\right)\right\}$$

εξαρτάται μόνο από το ϵ.

Κι εδώ η εκθετική εξάρτηση από το μ οφείλεται στη δομή της S ως άθροισμα ανεξαρτήτων.

Πολύ εύχρηστη ανισότητα ειδικά για συνδυαστικά προβλήματα. Χρειάζεται μόνο τα ξέρουμε το μ.

Όσο πιο μεγάλο είναι το μ τόσο καλύτερη ανισότητα παίρνουμε
$\Rightarrow$ τ.μ. S με μεγάλο μ είναι πιο εύκολα "ελεγχόμενες".

Παράδειγμα: Προσθετικές βάσεις των φυσικών

Έστω $E \subseteq \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$

Συνάρτηση αναπαράστασης:
$r_E(x) = \left|\left\{(a, b) \in E^2 : \ x = a + b, \ a \le b\right\}\right|$
$=$ με πόσους τρόπους γράφεται ο x σαν άθροισμα 2 στοιχείων του E.

E είναι Προσθετική Βάση:
κάθε $x \ge 2$ έχει $r_E(x) > 0$. Π.χ. $E = \{1, 2, 4, 6, \ldots\}$.

E είναι Ασυμπτωτική Προσθετική Βάση:
τελικά κάθε $x \in \mathbb{N}$ έχει $r_E(x) > 0$.
(Δηλ. για κάθε $x \ge x_0$ για κάποιο $x_0 \in \mathbb{N}$)

Γενικό πρόβλημα:
να βρεθούν *αραιές* (ασυμπτωτικές προσθετικές) βάσεις
(Δηλ. μικρό αλλά θετικό $r_E(x)$.)

Αραιές ασυμπτωτικές προσθετικές βάσεις

Θεώρημα (Erdős 1956)

Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$, σύνολο $E \subseteq \mathbb{N}$ και φυσικός x_0 τέτοια ώστε

$$c_1 \ln x \le r_E(x) \le c_2 \ln x, \quad (x \ge x_0).$$

Απόδειξη πιθανοθεωρητική.

Ανοιχτά προβλήματα:

(α) Μπορεί η συνάρτηση $\ln x$ να αντικατασταθεί από μικρότερη;

(β) Μπορεί κανείς να πετύχει να υπάρχει το $\lim_{x\to\infty} \frac{r_E(x)}{\ln x}$;

(γ) Υπάρχει μη πιθανοθεωρητική απόδειξη;

Εικασία (Erdős–Turán)

Αν για το $E \subseteq \mathbb{N}$ ισχύει τελικά $r_E(x) > 0$ τότε $\limsup_{x\to\infty} r_E(x) = \infty$.

Τυχαίο σύνολο φυσικών

Έστω $K > 0$ σταθερά. Θα την προσδιορίσουμε αργότερα.

Ορίζουμε τις πιθανότητες για $x = 1, 2, \ldots$.

$$p_x = \begin{cases} K\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/2} & \text{αν η ποσότητα αυτή } \in [0,1] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Το τυχαίο σύνολο φυσικών E ορίζεται παίρνοντας

$$\mathbb{P}\left[x \in E\right] = p_x, \quad (x \in \mathbb{N}),$$

ανεξάρτητα για όλα τα $x \in \mathbb{N}$.

Δηλ., ρίχνουμε από ένα νόμισμα για κάθε φυσικό για να δούμε αν θα τον βάλουμε στο E.

Συνάρτηση αναπαράστασης

Δείχνουμε ότι με θετική πιθανότητα το τυχαίο μας σύνολο έχει την ιδιότητα που θέλουμε.

Ορίζουμε τις τ.μ. $\chi_j = \mathbf{1}\,(j \in E)$, για $j \in \mathbb{N}$.
Ανεξάρτητες με $\mathbb{E}\chi_j = p_j$.

Για τη συνάρτηση αναπαράστασης έχουμε

$$r_E(x) = \sum_{j=1}^{\lfloor x/2 \rfloor} \chi_j \chi_{x-j}.$$

Η $r_E(x)$ είναι άθροισμα ***ανεξαρτήτων*** *δεικτριών* τ.μ. (με τιμές 0 ή 1 δηλ.).

Άρα καλύπτεται από την εκθετική ανισότητα απόκλισης.

Υπολογισμός της μέσης τιμής

Έστω $p_j \neq 0$ για $j \geq j_0$ και $p_j = 0$ για $j < j_0$.

Για x περιττό και μεγάλο (παρόμοια και για x άρτιο):

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}r_E(x) &= \sum_{j=1}^{\lfloor x/2 \rfloor} \mathbb{E}(\chi_j \chi_{x-j}) \\
&= \sum_{j=1}^{\lfloor x/2 \rfloor} \mathbb{E}\chi_j \mathbb{E}\chi_{x-j} \quad (x \text{ περιττός} \Rightarrow j \neq x-j, \text{ ανεξαρτησία}) \\
&= \sum_{j=j_0}^{\lfloor x/2 \rfloor} p_j p_{x-j} \\
&= \sum_{j=j_0}^{\lfloor x/2 \rfloor} K^2 \left(\frac{\ln j \ln(x-j)}{j(x-j)} \right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

Υπολογισμός της μέσης τιμής (συνέχεια)

$\mathbb{E}r_E(x) = \sum_{j=j_0}^{\lfloor x/2 \rfloor} K^2 \left(\frac{\ln j \ln(x-j)}{j(x-j)}\right)^{1/2}$

<u>Άνω φράγμα:</u> $\mathbb{E}r_E(x) \le K^2 \ln x \sum_{j=1}^{\lfloor x/2 \rfloor} \left(\frac{1}{j(x-j)}\right)^{1/2}$

<u>Κάτω φράγμα:</u> $\mathbb{E}r_E(x) \ge \frac{K^2}{4} \ln x \sum_{j=\sqrt{x}}^{\lfloor x/2 \rfloor} \left(\frac{1}{j(x-j)}\right)^{1/2}$

Αλλά $\sum_{j=1}^{\lfloor x/2 \rfloor} \left(\frac{1}{j(x-j)}\right)^{1/2} = \sum_{j=1}^{\lfloor x/2 \rfloor} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\frac{j}{x}(1-\frac{j}{x})}\right)^{1/2} \to \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{s(1-s)}\right)^{1/2} ds$

(για $x \to \infty$, Riemann άθροισμα για το $I = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{s(1-s)}\right)^{1/2} ds$)

Ομοίως $\sum_{j=\sqrt{x}}^{\lfloor x/2 \rfloor} \left(\frac{1}{j(x-j)}\right)^{1/2} \to I = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{s(1-s)}\right)^{1/2} ds$

Άρα, για x μεγάλο έχουμε τη σωστή τάξη μεγέθους:

$$C_1 \ln x := \frac{IK^2}{8} \ln x \le \quad \mathbb{E}r_E(x) \quad \le 2IK^2 \ln x =: C_2 \ln x.$$

Έλεγχος απόκλισης των τυχαίων μεταβλητών

<u>Κακά ενδεχόμενα:</u> $A_x = \{|r_E(x) - \mathbb{E}r_E(x)| \ge \epsilon\mathbb{E}r_E(x)\}$ με $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Από εκθετική ανισότητα απόκλισης:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A_x] &\le 2e^{-c_\epsilon \mathbb{E}r_E(x)} \\
&\le 2e^{-c_\epsilon C_1 \ln x} \\
&= 2x^{-C_1 c_\epsilon} \\
&= 2x^{-c_\epsilon I K^2/8}.
\end{aligned}$$

Επιλέγουμε K τόσο μεγάλο ώστε ο εκθέτης $c_\epsilon I K^2/8 > 1$. Έπεται ότι

$$\sum_{x=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_x] \le \sum_{x=1}^{\infty} 2x^{-c_\epsilon I K^2/8} < \infty.$$

Έλεγχος απόκλισης των τυχαίων μεταβλητών, συνέχεια

Σύγκλιση της $\sum_x \mathbb{P}\left[A_x\right] \Rightarrow$ υπάρχει x_0 τ.ώ.

$$\sum_{x \ge x_0} \mathbb{P}\left[A_x\right] < \frac{1}{2},$$

άρα με πιθανότητα $\ge 1/2$ δεν ισχύει κανένα από τα $A_x, x \ge x_0$.

Για $x \ge x_0$ δηλ.

$$r_E(x) \ge \frac{1}{2}\mathbb{E} r_E(x) \ge \frac{IK^2}{16} \ln x$$

και

$$r_E(x) \le \frac{3}{2}\mathbb{E} r_E(x) \le 3IK^2 \ln x.$$