Ανάλυση ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2022-23.

Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω f συνεχής στο $[0, +\infty)$ και έστω ότι υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και ότι είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

2. Αποδείξτε ότι η συνεχής συνάρτηση με τύπο
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0, \\ 1, & \text{αν } x > 0, \end{cases}$$
δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1]$, αποδείξτε ότι το όριο $\lim_{x\to 0+} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός.

4. Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και έστω ότι $f(x) = 1$ για κάθε άρρητο x στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f = b - a$.

5. Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b f < 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει υποδιάστημα I θετικού μήκους του $[a, b]$ ώστε να ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$.

6. (i) Έστω f συνεχής στο $[a, b]$ και $\int_a^b f = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = 0$.
(ii) Έστω f συνεχής στο $[0, 1]$ και $\int_{k/n}^{(k+1)/n} f = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ με $0 \leq k \leq n - 1$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο $[0, 1]$.