Ανάλυση ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2022-23.

Δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Βρείτε τα όρια
$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+\sqrt{x}}\tfrac{t}{1+t^2}\,dt,\qquad \lim_{x\to 0+}\tfrac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x}\tfrac{t}{1+t^2}\,dt.$$

2. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\xi\in[a,b)$. Αποδείξτε:
$$\lim_{x\to\xi+}\int_\xi^x f(t)\,dt=0.$$

3. Θεωρήστε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & \text{αν } x\neq 0,\\ 0 & \text{αν } x=0.\end{cases}$$
Αποδείξτε ότι η f, αν και δεν είναι συνεχής στο 0, έχει παράγουσα στο $\mathbb{R}$.

4. Βρείτε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχή στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει
$$\int_0^x f(t)\,dt=e^x-1\quad\text{για κάθε } x.$$
Πόσες λύσεις υπάρχουν;

5. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,+\infty)$ και έστω ότι ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$ και
$$(f(x))^2=2\int_0^x f(t)\,dt\quad\text{για κάθε } x\geq 0.$$
(i) Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x>0$.
(ii) Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
(iii) Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x)=x$ για κάθε $x\geq 0$.

6. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω η $g:[a+c,b+c]\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=f(x-c)$ για κάθε $x\in[a+c,b+c]$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a+c,b+c]$ και
$$\int_{a+c}^{b+c}g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\quad\text{ή, ισοδύναμα,}\quad\int_{a+c}^{b+c}f(x-c)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

7. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
(i) Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχουν τμηματικά σταθερές συναρτήσεις $g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$ και $\int_a^b h(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx<\epsilon$.
(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχουν $g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$ και $\int_a^b h(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx<\epsilon$.