Ανάλυση ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2022-23.

Τρίτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Βρείτε τις συναρτήσεις $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει
$$f(x)=1+\tfrac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt \quad \text{για κάθε } x>0.$$

2. Βρείτε το όριο
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt.$$
Βρείτε $a>0$ και b,c,d ώστε
$$\lim_{x\to 0+}\tfrac{1}{e^x-b-cx-dx^2}\int_0^x \tfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt=1.$$

3. Έστω $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ ώστε η $f':[0,a]\to\mathbb{R}$ να είναι συνεχής στο $[0,a]$ και $f(0)=0$. Θεωρήστε την $g:[0,a]\to\mathbb{R}$ με τύπο
$$g(x)=\begin{cases}\frac{(f(x))^2}{x} & \text{αν } 0<x\le a,\\ 0 & \text{αν } x=0,\end{cases}$$
και αποδείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $[0,a]$.
Να συγκρίνετε τις παραγώγους των $g(x)$ και $\int_0^x (f'(t))^2\,dt$.
Αποδείξτε ότι ισχύει
$$(f(x))^2\le x\int_0^x (f'(t))^2\,dt \quad \text{για κάθε } x\in[0,a].$$
Αν $(f(a))^2=a\int_0^a (f'(t))^2\,dt$, αποδείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι σταθερή στο $(0,a]$.
Αν $(f(a))^2=a\int_0^a (f'(t))^2\,dt$ και $f'(0)=2$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x)=2x$ για κάθε $x\in[0,a]$.

4. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ώστε η $f':[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ να είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $f(0)=0$.
Αποδείξτε ότι ισχύει
$$e^{\frac{f(x)}{x}}\le \tfrac{1}{x}\int_0^x e^{f'(t)}\,dt \quad \text{για κάθε } x>0.$$
Αν υπάρχει $a>0$ ώστε να ισχύει $e^{\frac{f(a)}{a}}=\frac{1}{a}\int_0^a e^{f'(t)}\,dt$, αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $f(x)=cx$ για κάθε $x\in[0,a]$.

5. Έστω
$$f_n(x)=\tfrac{nx}{1+n^2x^2},\ \ g_n(x)=\tfrac{n^2x}{1+n^2x^2} \quad \text{για κάθε } x \text{ και κάθε } n\in\mathbb{N}.$$
Αποδείξτε ότι οι (f_n), (g_n) συγκλίνουν σε κάποιες f,g κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Βρείτε τις f,g.

6. Έστω
$$f_n(x)=\begin{cases}\min\{nx,1\} & \text{αν } x\ge 0,\\ \max\{nx,-1\} & \text{αν } x\le 0,\end{cases}$$
για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Βρείτε την f.