

Ανάλυση II, εαρινό εξάμηνο 2022-23.

Τέταρτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω $f_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$ για κάθε $x \geq 0$.
Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$. Ποιά είναι η f ;
Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.
2. Έστω $f_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{\sqrt{n}x}{1+nx^2}$ για κάθε $x \geq 0$.
Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0, +\infty)$.
Ποιά είναι η f ;
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.
Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.
3. Έστω $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ για κάθε x .
Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο \mathbb{R} .
Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $f'_n(x) \rightarrow f'(x)$, αν $x \neq 0$, αλλά $f'_n(0) \not\rightarrow f'(0)$.
Αποδείξτε ότι η (f'_n) συγκλίνει σε κάποια g κατά σημείο στο \mathbb{R} .
Αποδείξτε με τρεις τρόπους ότι η (f'_n) δεν συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο \mathbb{R} .
Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.
4. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο \mathbb{R} .
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[-a, a]$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} .
5. Έστω $p > 2$. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο \mathbb{R} .
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ότι η $s'(x)$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} .
6. Έστω η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο \mathbb{R} .
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Ποιά είναι τα σημεία μεγίστου ή ελαχίστου της $s(x)$;
Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} s(x) = 0$.