

Ανάλυση II, εαρινό εξάμηνο 2022-23.

Πέμπτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Έστω R η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - \xi)^n$.
 - (i) Τι συμπεραίνετε για το R αν η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη; αν η $(\frac{1}{a_n})$ είναι φραγμένη;
 - (ii) Αν η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ αποκλίνει και η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι $R = 1$.
 - (iii) Αν η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη, αποδείξτε ότι $R = 1$.
2. (i) Έστω $R > 0$ η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - \xi)^n$ και $s(x)$ η συνάρτηση που ορίζεται από την δυναμοσειρά στο διάστημα $(\xi - R, \xi + R)$. Αποδείξτε ότι
$$s^{(m)}(x) = m! \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} a_n(x - \xi)^{n-m} \quad \text{για κάθε } x \in (\xi - R, \xi + R), m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$$
και
$$s^{(m)}(\xi) = m! a_m \quad \text{για κάθε } m \in \mathbb{Z}, m \geq 0.$$
 - (ii) Έστω $R_1 > 0$ η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,1}(x - \xi)^n$ και $s_1(x)$ η συνάρτηση που ορίζεται από την δυναμοσειρά στο διάστημα $(\xi - R_1, \xi + R_1)$. Έστω, επίσης, $R_2 > 0$ η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,2}(x - \xi)^n$ και $s_2(x)$ η συνάρτηση που ορίζεται από την δυναμοσειρά στο διάστημα $(\xi - R_2, \xi + R_2)$. Αν υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $s_1(x)$ και $s_2(x)$ ταυτίζονται σε ένα διάστημα $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ με $\delta > 0$, αποδείξτε ότι οι δύο δυναμοσειρές ταυτίζονται, δηλαδή ότι ισχύει $a_{n,1} = a_{n,2}$ για κάθε n .
3. Έστω $R > 0$ και έστω ότι ισχύει $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ για $x \in (-R, R)$.
 - (i) Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άρτια στο διάστημα $(-R, R)$ αν και μόνο αν ισχύει $a_n = 0$ για κάθε περιττό $n \in \mathbb{N}$.
 - (ii) Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι περιττή στο διάστημα $(-R, R)$ αν και μόνο αν ισχύει $a_n = 0$ για κάθε άρτιο $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$.
4. Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-1)}$ και αποδείξτε ότι η συνάρτηση $s(x)$ που ορίζεται από την δυναμοσειρά είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' - xy = 1$ στο διάστημα σύγκλισης. Βρείτε την συνάρτηση $s(x)$.