

## Ανάλυση II, εαρινό εξάμηνο 2022-23.

### Έκτο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. (i) Για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  ορίζουμε πέντε συναρτήσεις  $d$  με τους τύπους

$$d(x, y) = (x - y)^2, \quad d(x, y) = |x - y|^{1/2}, \quad d(x, y) = |x^2 - y^2|,$$

$$d(x, y) = |x - 2y|, \quad d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

Ποιές από αυτές τις  $d$  είναι μετρικές στο  $\mathbb{R}$ ;

- (ii) Για κάθε  $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  ορίζουμε

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ((x_1 - y_1)^2 + 4(x_2 - y_2)^2)^{1/2}.$$

Είναι η  $d$  μετρική στο  $\mathbb{R}^2$ ;

- (iii) Ορίζουμε

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1|$$

για κάθε  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ . Είναι η  $d$  μετρική στο  $\mathbb{R}^3$ ;

2. Αποδείξτε ότι κάθε μη-κενό ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  περιέχει και ρητούς και άρρητους αριθμούς. Βρείτε ένα απλό κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  το οποίο να περιέχει μόνο ρητούς αριθμούς και ένα άλλο το οποίο να περιέχει μόνο άρρητους αριθμούς.
3. Ποιά από τα παρακάτω είναι ανοικτά ή κλειστά υποσύνολα του  $\mathbb{R}$ ;
- (i) Το  $\{0, 1, 2\}$  και το  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ ,
- (ii) Το  $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , το  $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$  και το  $\mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\})$ .
- Βρείτε το εσωτερικό, την κλειστότητα και το σύνορο καθενός από αυτά τα σύνολα.
4. Ποιά από τα παρακάτω είναι ανοικτά ή κλειστά υποσύνολα του  $\mathbb{R}^2$ ;
- (i) Το  $\{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0\}$  και το  $\{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0\}$ .
- (ii) Το  $\{(x_1, 0) \mid a \leq x_1 \leq b\}$  και το  $\{(x_1, 0) \mid a < x_1 < b\}$ .
- (iii) Το  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) \mid a \leq x_1 \leq b\}$  και το  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) \mid a < x_1 < b\}$ .
- Βρείτε το εσωτερικό, την κλειστότητα και το σύνορο καθενός από αυτά τα σύνολα.
5. Ποιά από τα παρακάτω είναι ανοικτά ή κλειστά υποσύνολα του  $\mathbb{R}^3$ ;
- (i) Το  $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 > 0\}$  και το  $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \leq 0\}$ .
- (ii) Το  $\{(x_1, 0, 0) \mid a < x_1 < b\}$  και το  $\{(x_1, 0, 0) \mid a \leq x_1 \leq b\}$ .
- (iii) Το  $\{(x_1, x_2, 0) \mid a < x_1 < b, c < x_2 < d\}$  και το  $\{(x_1, x_2, 0) \mid a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d\}$ .
- Βρείτε το εσωτερικό, την κλειστότητα και το σύνορο καθενός από αυτά τα σύνολα.
6. Έστω μετρικός χώρος  $(X, d)$ , ανοικτό  $A \subseteq X$  και κλειστό  $B \subseteq X$ . Αποδείξτε ότι το  $A \setminus B$  είναι ανοικτό και το  $B \setminus A$  είναι κλειστό.
7. Έστω μετρικός χώρος  $(X, d)$  και  $A \subseteq X$ . Αποδείξτε ότι  $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$  και  $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$ .