Ανάλυση ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2022-23.

Έβδομο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Αν το A είναι μη-κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $\sup A \in \overline{A}$.

2. Έστω μετρικός χώρος (X, d). Αποδείξτε ότι $\bigcup_{r>0} N_x(r) = X$ και $\bigcap_{r>0} N_x(r) = \{x\}$ για κάθε $x \in X$.

3. Έστω μετρικός χώρος (X, d), $x \in X$ και $r > 0$. Αποδείξτε ότι $\overline{N_x(r)} \subseteq \overline{N}_x(r)$.
Στο $\mathbb{R}^d$ αποδείξτε ότι $\overline{N_{\mathrm{x}}(r)} = \overline{N}_{\mathrm{x}}(r)$.
Ισχύει πάντοτε ότι $\overline{N_x(r)} = \overline{N}_x(r)$; Θεωρήστε, για παράδειγμα, μη-κενό σύνολο X με την διακριτή μετρική d_δ και συγκρίνατε τα $\overline{N_x(1)}$ και $\overline{N}_x(1)$.

4. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B \subseteq X$.
(i) Αν $A \subseteq B$, αποδείξτε ότι $A^\circ \subseteq B^\circ$ και $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
(ii) Αποδείξτε ότι $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ και $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.
(iii) Αποδείξτε ότι $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ και $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

5. Έστω μετρικός χώρος (X, d), μη-κενό $A \subseteq X$ και $x \in X$. Ορίζουμε την **απόσταση** του x από το A με τον τύπο $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \,|\, y \in A\}$.
Αποδείξτε ότι $d(x, A) = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.