Ανάλυση ΙΙ, εαρινό εξάμηνο 2022-23.

Όγδοο φυλλάδιο ασκήσεων.

1. Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : A \to Y$ ορισμένη σε οποιοδήποτε υποσύνολο A μετρικού χώρου X με την διακριτή μετρική d_δ και όπου Y είναι μετρικός χώρος με μετρική ρ, είναι συνεχής στο A.

2. Αποδείξτε ότι τα $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 < x^3 - x < 4\}$ και $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{\sin x}{2} < e^x < \sin x\}$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (με την Ευκλείδεια μετρική).

   Αποδείξτε ότι το $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \,|\, e^{-\|\mathrm{x}\|_2} + \sin \|\mathrm{x}\|_2 > 0\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ (με την Ευκλείδεια μετρική).

3. Έστω μετρικός χώρος X με μετρική d, $A \subseteq X$ και $x \in X$. Αποδείξτε ότι το x είναι συνοριακό σημείο του A αν και μόνον αν υπάρχουν ακολουθίες (x'_n) στο A και (x''_n) στο A^c ώστε $x'_n \to x$ και $x''_n \to x$.

4. Χρησιμοποιώντας ακολουθίες, αποδείξτε ότι κάθε κλειστή μπάλα είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ (με την Ευκλείδεια μετρική).

5. Αποδείξτε ότι το $\{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ (με την Ευκλείδεια μετρική) και ότι το $\{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leq x_3 \leq 1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ (με την Ευκλείδεια μετρική).

6. (i) Θεωρήστε το υποσύνολο $A = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ του $\mathbb{R}^2$. Έχει η συνάρτηση $f(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2}$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο A;

   (ii) Θεωρήστε το υποσύνολο $A = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_2 \leq 1, |x_3| \leq 2\}$ του $\mathbb{R}^3$. Έχει η συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 + x_3} \sin(x_1 x_2)$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο A;

7. Έστω φραγμένο υποσύνολο M του $\mathbb{R}^d$ (με την Ευκλείδεια μετρική). Αποδείξτε ότι τα $\overline{M}$ και ∂M είναι συμπαγή.