ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Χεμερινό εξάμηνο 2006-07

ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟ

ΔΕΥΤΕΡΑ, 9-10-06, 11-13.

ΓΩΝΙΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΙ.

Θεώρημα 1. Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι ίσο με 180^o.

Θεώρημα 2. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι γωνιών του τριγώνου. Επομένως, κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε μία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Θεώρημα 3. Έστω τρίγωνο ABC και A' εσωτερικό σημείο του C. Τότε $0^o < \widehat{BAC} < \widehat{BA'C} < 180^o$.

Θεώρημα 4. Έστω ευθύγραμμο τμήμα BC το οποίο είναι χορδή κύκλου κέντρου O και σημείο A το οποίο δεν ανήκει στην ευθεία BC. Έστω Π και Π' τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία BC.
1. Έστω ότι το BC είναι διάμετρος του κύκλου.
(i) Αν το A είναι σημείο του κύκλου, τότε $\widehat{BAC} = 90^o$.
(ii) Αν το A είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, τότε $0^o < \widehat{BAC} < 90^o$.
(ii) Αν το A είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου, τότε $90^o < \widehat{BAC} < 180^o$.
2. Έστω ότι το BC δεν είναι διάμετρος του κύκλου και τα A και O είναι και τα δύο στο Π ή και τα δύο στο Π'.
(i) Αν το A είναι σημείο του κύκλου, τότε $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$.
(ii) Αν το A είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, τότε $0^o < \widehat{BAC} < \frac{1}{2}\widehat{BOC}$.
(ii) Αν το A είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου, τότε $\frac{1}{2}\widehat{BOC} < \widehat{BAC} < 180^o$.
3. Έστω ότι το BC δεν είναι διάμετρος του κύκλου και τα A και O είναι το ένα στο Π και το άλλο στο Π'.
(i) Αν το A είναι σημείο του κύκλου, τότε $\widehat{BAC} = 180^o - \frac{1}{2}\widehat{BOC}$.
(ii) Αν το A είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, τότε $0^o < \widehat{BAC} < 180^o - \frac{1}{2}\widehat{BOC}$.
(ii) Αν το A είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου, τότε $180^o - \frac{1}{2}\widehat{BOC} < \widehat{BAC} < 180^o$.

Άσκηση 1. Έστω ευθύγραμμο τμήμα BC και κύκλος με χορδή το BC. Θεωρήστε μεταβλητό σημείο A το οποίο διαγράφει τον κύκλο. Περιγράψτε την συμπεριφορά της $\widehat{BAC}$. Τι γίνεται καθώς το A διασχίζει τα B και C;

Άσκηση 2. Έστω ευθύγραμμο τμήμα BC και κύκλος ο οποίος έχει το B ως εσωτερικό και το C ως εξωτερικό του σημείο. Θεωρήστε μεταβλητό σημείο A το οποίο διαγράφει τον κύκλο. Περιγράψτε την συμπεριφορά της $\widehat{BAC}$.

Άσκηση 3. Έστω ευθύγραμμο τμήμα BC και ευθεία η οποία έχει ένα κοινό σημείο με το BC. Θεωρήστε μεταβλητό σημείο A το οποίο διαγράφει την ευθεία. Περιγράψτε την συμπεριφορά της $\widehat{BAC}$.

Άσκηση 4. Μπορείτε να λύσετε την άσκηση 2 αν τα B και C είναι και τα δύο εσωτερικά ή και τα δύο εξωτερικά σημεία του κύκλου; Μπορείτε να λύσετε την άσκηση 3 αν η ευθεία δεν έχει κοινό σημείο με το BC;

Άσκηση 5. Έστω κύκλος, χορδή BC του κύκλου αυτού και Π και Π' τα ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία BC. Πάρτε σημείο A του κύκλου στο ημιεπίπεδο Π και ημιευθεία BK με κορυφή το B η οποία περιέχεται στο ημιεπίπεδο Π'. Αποδείξτε ότι η ημιευθεία BK εφάπτεται του κύκλου στο B αν και μόνον αν $\widehat{KBC} = \widehat{BAC}$.

Πόρισμα 1. Έστω ευθύγραμμο τμήμα BC, κύκλος με χορδή το BC και Π και Π' τα ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία BC.
1. Αν τα A και A' είναι σημεία του κύκλου και ανήκουν και τα δύο στο Π ή και τα δύο στο Π', τότε $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C}$.
2. Αν τα A και A' είναι σημεία του κύκλου και ανήκουν το ένα στο Π και το άλλο στο Π', τότε $\widehat{BAC} + \widehat{BA'C} = 180$.

Πόρισμα 2. Έστω ευθύγραμμο τμήμα BC, Π και Π' τα ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία BC και γωνία ϕ με $0^o < \phi < 180^o$.
1. Αν $\phi = 90^o$, τότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων A με την ιδιότητα $\widehat{BAC} = \phi$ είναι ο κύκλος με διάμετρο το BC εκτός των σημείων B και C.
2. Αν $0^o < \phi < 90^o$, θεωρούμε τα συμμετρικά ως προς την ευθεία BC σημεία O και O' με τις ιδιότητες: $OB = OC = O'B = O'C$ και $\widehat{BOC} = \widehat{BO'C} = 2\phi$. Έστω ότι το O ανήκει στο Π και το O' στο Π'. Τότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων A με την ιδιότητα $\widehat{BAC} = \phi$ είναι η ένωση δύο τόξων με άκρα B και C. Το ένα τόξο είναι η τομή του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα OB με το Π και το άλλο τόξο είναι η τομή του κύκλου με κέντρο O' και ακτίνα $O'B$ με το Π'.
3. Αν $90 < \phi < 180^o$, θεωρούμε τα συμμετρικά ως προς την ευθεία BC σημεία O και O' με τις ιδιότητες: $OB = OC = O'B = O'C$ και $\widehat{BOC} = \widehat{BO'C} = 360^o - 2\phi$. Έστω ότι το O ανήκει στο Π και το O' στο Π'. Τότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων A με την ιδιότητα $\widehat{BAC} = \phi$ είναι η ένωση δύο τόξων με άκρα B και C. Το ένα τόξο είναι η τομή του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα OB με το Π' και το άλλο τόξο είναι η τομή του κύκλου με κέντρο O' και ακτίνα $O'B$ με το Π.

ΗΜΙΤΟΝΑ ΓΩΝΙΩΝ.

Θεώρημα 5. Έστω γωνία $\widehat{A}$ με $0^o \le \widehat{A} \le 180^o$. Θεωρούμε σημείο B διαφορετικό από το A σε οποιαδήποτε από τις πλευρές της $\widehat{A}$ και έστω BC η κάθετη από το B στην ευθεία της άλλης πλευράς της $\widehat{A}$. Τότε η τιμή του λόγου $\frac{BC}{BA}$ δεν εξαρτάται από τη θέση του B (στις πλευρές της $\widehat{A}$).

Ορισμός 1. Έστω γωνία $\widehat{A}$ με $0^o \le \widehat{A} \le 180^o$. Θεωρούμε σημείο B διαφορετικό από το A σε οποιαδήποτε από τις πλευρές της $\widehat{A}$ και έστω BC η κάθετη από το B στην ευθεία της άλλης πλευράς της $\widehat{A}$. Ονομάζουμε *ημίτονο* της $\widehat{A}$ την τιμή του $\frac{BC}{BA}$ και συμβολίζουμε

$$\text{ημ}\widehat{A} = \frac{BC}{BA}\,.$$

Θεώρημα 6. 1. ημ$0^o =$ ημ$180^o = 0$.
2. Αν $0^o \leq \widehat{A} \leq 180^o$, τότε ημ$\widehat{A} =$ ημ$(180^o - \widehat{A})$.

Θεώρημα 7. Έστω τρίγωνο ABC.
1. Αν $AB = AC$, τότε $\widehat{B} = \widehat{C}$.
2. Αν $AB < AC$, τότε $\widehat{B} > \widehat{C}$.
3. Αν $AB > AC$, τότε $\widehat{B} < \widehat{C}$.

Πόρισμα 3. Έστω τρίγωνο ABC.
1. Αν $\widehat{B} = \widehat{C}$, τότε $AB = AC$.
2. Αν $\widehat{B} > \widehat{C}$, τότε $AB < AC$.
3. Αν $\widehat{B} < \widehat{C}$, τότε $AB > AC$.

Θεώρημα 8. Έστω τρίγωνο ABC. Τότε $BC < BA + AC$.

Θεώρημα 9. Έστω ευθεία l και σημείο A που δεν ανήκει στην l. Θεωρούμε την κάθετη AB προς την l και δύο οποιαδήποτε σημεία C και C' της l. Αν $BC < BC'$, τότε $AC < AC'$.

Θεώρημα 10. Έστω γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{A}'$.
1. Αν $0^o \leq \widehat{A} < \widehat{A}' \leq 90^o$, τότε ημ$\widehat{A} <$ ημ$\widehat{A}'$.
2. Αν $90^o \leq \widehat{A} < \widehat{A}' \leq 180^o$, τότε ημ$\widehat{A} >$ ημ$\widehat{A}'$.

ΤΕΤΑΡΤΗ, 11-10-06, 11-12.

ΕΜΒΑΔΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

Θεώρημα 11. Έστω τρίγωνο ABC και AH_a, BH_b και CH_c τα τρία ύψη του. Τότε $BC \cdot AH_a = CA \cdot BH_b = AB \cdot CH_c$.

Ορισμός 2. Έστω τρίγωνο ABC και AH_a, BH_b και CH_c τα τρία ύψη του. Ονομάζουμε *εμβαδό* του ABC την κοινή τιμή $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH_a = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot BH_b = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH_c$ και συμβολίζουμε

$$(ABC) = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH_a = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot BH_b = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH_c \,.$$

Άσκηση 6. Έστω τρίγωνο ABC.
1. Αν το D ανήκει στο BC, αποδείξτε ότι $(ABC) = (ABD) + (ADC)$.
2. Αν το D είναι εσωτερικό σημείο του ABC, αποδείξτε ότι $(ABC) = (ABD)+(BCD)+(CAD)$.
3. Αν τα D, E και F ανήκουν στις BC, CA και AB, αντιστοίχως, αποδείξτε ότι $(ABC) = (AFE) + (BDF) + (CED) + (EFD)$.

Θεώρημα 12. Έστω τρίγωνο ABC. Τότε

$$(ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \text{ημ}\widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BA \cdot \text{ημ}\widehat{B} = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \cdot \text{ημ}\widehat{C} \,.$$

ΤΡΙΓΩΝΟ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ.

Θεώρημα 13. Έστω ευθύγραμμο τμήμα BC, l η μεσοκάθετος του BC και σημείο A. Έστω Π και Π' τα ημιεπίπεδα που ορίζει η l ώστε το B να ανήκει στο Π και το C να ανήκει στο Π'.
1. Αν το A ανήκει στην l, τότε $AB = AC$.
2. Αν το A ανήκει στο Π, τότε $AB < AC$.
3. Αν το A ανήκει στο Π', τότε $AB > AC$.

Πόρισμα 4. Έστω ευθύγραμμο τμήμα BC και l η μεσοκάθετός του. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων A με την ιδιότητα $AB = AC$ είναι η l.

Θεώρημα 14. Έστω τρίγωνο ABC. Υπάρχει μοναδικός κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και C.

Ορισμός 3. Έστω τρίγωνο ABC. Ο μοναδικός κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και C ονομάζεται *περιγεγραμμένος κύκλος* του ABC.

Θεώρημα 15. Οι μεσοκάθετοι των τριών πλευρών οποιουδήποτε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Ορισμός 4. Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου ονομάζεται *περίκεντρο* του τριγώνου.

Άσκηση 7. Έστω ευθύγραμμο τμήμα BC, Π και Π' τα ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία BC και σημεία A και D διαφορετικά μεταξύ τους.
1. Έστω ότι τα A και D είναι και τα δύο στο Π ή και τα δύο στο Π'. Αποδείξτε ότι υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τα A, B, C και D αν και μόνον αν $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.
2. Έστω ότι τα A και D είναι το ένα στο Π και τα άλλο στο Π'. Αποδείξτε ότι υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τα A, B, C και D αν και μόνον αν $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^o$.

Ο ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΗΜΙΤΟΝΩΝ.

Θεώρημα 16. Έστω τρίγωνο ABC και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του ABC. Τότε
$$\frac{BC}{\text{ημ}\widehat{A}} = \frac{CA}{\text{ημ}\widehat{B}} = \frac{AB}{\text{ημ}\widehat{C}} = 2R\,.$$

ΔΕΥΤΕΡΑ, 23-10-06, 11-13.

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ CEVA.

Λήμμα 1. Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB και θετικός αριθμός λ.
(i) Υπάρχει μοναδικό σημείο L στο ευθύγραμμο τμήμα AB ώστε $\frac{AL}{LB} = \lambda$.
(ii) Αν $\lambda \neq 1$, υπάρχει μοναδικό σημείο L της ευθείας του AB και εξωτερικό του AB ώστε $\frac{AL}{LB} = \lambda$. Όμως, δεν υπάρχει κανένα σημείο L της ευθείας του AB και εξωτερικό του AB ώστε $\frac{AL}{LB} = 1$.

Το Θεώρημα του Ceva. Έστω τρίγωνο ABC και σημεία K, L και M των ευθυγράμμων τμημάτων BC, CA και AB, αντιστοίχως. Τα ευθύγραμμα τμήματα AK, BL και CM διέρχονται από το ίδιο σημείο αν και μόνον αν $\frac{BK}{KC}\frac{CL}{LA}\frac{AM}{MB} = 1$.

Θεώρημα 17. Οι τρείς διάμεσοι οποιουδήποτε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Μία απόδειξη του θεωρήματος 17 είναι απλή εφαρμογή του θεωρήματος του Ceva. Δεύτερη απόδειξη βασίζεται στο

Θεώρημα 18. Κάθε διάμεσος τριγώνου διαιρεί οποιαδήποτε από τις δύο άλλες διαμέσους σε δύο ευθύγραμμα τμήματα με λόγο $1:2$. Δηλαδή, αν AK, BL είναι δύο από τις διαμέσους του τριγώνου ABC και P είναι το σημείο τομής των AK και BL, τότε $\frac{PK}{AP} = \frac{1}{2}$.

Ορισμός 5. Το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου ονομάζεται *κέντρο βάρους* ή *βαρύκεντρο* του τριγώνου.

Θεώρημα 19. Οι τρείς διάμεσοι ενός τριγώνου διαιρούν το τρίγωνο σε έξι τρίγωνα με το ίδιο εμβαδό.

Θεώρημα 20. Οι τρείς διχοτόμοι των γωνιών οποιουδήποτε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Μία απόδειξη του θεωρήματος 20 είναι απλή εφαρμογή του θεωρήματος του Ceva και του

Θεώρημα 21. Κάθε διχοτόμος γωνίας τριγώνου διαιρεί την απέναντι πλευρά σε δύο ευθύγραμμα τμήματα με λόγο ίσο με τον λόγο των αντίστοιχων δύο άλλων πλευρών. Δηλαδή, αν AK είναι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ τριγώνου ABC, τότε $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$.

Δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος 20 είναι εφαρμογή του πορίσματος 5 παρακάτω.

Θεώρημα 22. Έστω γωνία $\widehat{A} = \widehat{\epsilon A \zeta}$ με $0^o < \widehat{A} < 180^o$, με πλευρές τις ημιευθείες $A\epsilon$ και $A\zeta$ και έστω $A\eta$ η διχοτόμος της $\widehat{A}$.
(i) Αν το σημείο B ανήκει στην $A\eta$, τότε η απόσταση του B από την ευθεία ϵ είναι ίση με την απόσταση του B από την ευθεία ζ.
(ii) Αν το B ανήκει στη γωνία $\widehat{\epsilon A \eta}$, τότε η απόσταση του B από την ϵ είναι μικρότερη από την απόσταση του B από την ζ.

(ii) Αν το B ανήκει στη γωνία $\widehat{\eta A\zeta}$, τότε η απόσταση του B από την ϵ είναι μεγαλύτερη από την απόσταση του B από την ζ.

Πόρισμα 5. Έστω γωνία $\widehat{A} = \widehat{\epsilon A\zeta}$ με πλευρές τις ημιευθείες $A\epsilon$ και $A\zeta$ και έστω $A\eta$ η διχοτόμος της $\widehat{A}$. Τότε η διχοτόμος $A\eta$ της γωνίας $\widehat{A}$ είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων της γωνίας των οποίων οι αποστάσεις από τις ευθείες ϵ και ζ είναι ίσες.

ΤΕΤΑΡΤΗ, 25-10-06, 11-12.

Ορισμός 6. Το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών ενός τριγώνου ονομάζεται *έγκεντρο* του τριγώνου.

Θεώρημα 23. Το έγκεντρο ενός τριγώνου είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου, δηλαδή, του κύκλου ο οποίος εφάπτεται των τριών πλευρών του τριγώνου.

Θεώρημα 24. Έστω τρίγωνο ABC και I το έγκεντρό του. Αν IK, IL και IM είναι κάθετες στις BC, CA και AB, αντιστοίχως, τότε: $AL = AM = s - a$, $BM = BK = s - b$ και $CK = CL = s - c$, όπου $s = \frac{a+b+c}{2}$ και $a = BC$, $b = CA$ και $c = AB$.

Λήμμα 2. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ABC και BL, CM δύο από τα ύψη του. Τότε $\frac{AM}{AL} = \frac{AC}{AB}$.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Ceva και το λήμμα 2, αποδείξαμε το

Θεώρημα 25. Τα ύψη ενός οξυγωνίου τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λήμμα 3. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ABC και BL, CM δύο από τα ύψη του με σημείο τομής το H. Τότε τα σημεία M και L ανήκουν στον κύκλο με διάμετρο το BC καθώς και στον κύκλο με διάμετρο το AH.

Χρησιμοποιώντας το λήμμα 3, αποδείξαμε με δεύτερο τρόπο το θεώρημα 25.

ΔΕΥΤΕΡΑ, 6-11-06, 11-13.

ΤΟ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ CEVA.

Ορισμός 7. Έστω AB, CD δύο ευθύγραμμα τμήματα επί της ίδιας ευθείας. Ο *προσημασμένος λόγος* $\frac{AB}{CD}$ είναι απλώς ο λόγος των αντίστοιχων μηκών με πρόσημο $+$, αν τα ευθύγραμμα τμήματα είναι ομόρροπα, και με πρόσημο $-$, αν τα ευθύγραμμα τμήματα είναι αντίρροπα.

Όταν γράφουμε $\frac{AB}{CD}$, χωρίς να αναφέρουμε ρητά ότι πρόκειται περί του προσημασμένου λόγου, εννοούμε τον λόγο των μηκών (με πρόσημο $+$), ανεξαρτήτως του προσανατολισμού των ευθυγράμμων τμημάτων.

Λήμμα 4. Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB και αριθμός λ διαφορετικός από το 0 και από το -1. Τότε υπάρχει μοναδικό σημείο L της ευθείας διαφορετικό από τα A και B ώστε ο προσημασμένος λόγος $\frac{AL}{LB}$ να είναι ίσος με λ. Ειδικώτερα:
(i) αν $0 < \lambda < +\infty$, τότε το L είναι ανάμεσα στα A και B,
(ii) αν $-\infty < \lambda < -1$, τότε το L είναι στην ημιευθεία με κορυφή το B η οποία δεν περιέχει το A και
(iii) αν $-1 < \lambda < 0$, τότε το L είναι στην ημιευθεία με κορυφή το A η οποία δεν περιέχει το B.

Άσκηση 8. Αναφερόμενοι στο προηγούμενο λήμμα, αποδείξτε ότι:
(i) αν το L κινείται ανάμεσα στα A και B από το A προς το B, τότε ο προσημασμένος λόγος $\frac{AL}{LB}$ αυξάνεται από το 0 προς το $+\infty$,
(ii) αν το L κινείται στην ημιευθεία με κορυφή το B η οποία δεν περιέχει το A και απομακρύνεται από το B, τότε ο προσημασμένος λόγος $\frac{AL}{LB}$ αυξάνεται από το $-\infty$ προς το -1 και
(iii) αν το L κινείται στην ημιευθεία με κορυφή το A η οποία δεν περιέχει το B και πλησιάζει προς το A, τότε ο προσημασμένος λόγος $\frac{AL}{LB}$ αυξάνεται από το -1 προς το 0.

Άσκηση 9. Αναφερόμενοι πάλι στο προηγούμενο λήμμα, περιγράψτε ακριβώς την κατασκευή του L δοθέντος του λ.

Το Γενικευμένο Θεώρημα του Ceva. Έστω τρίγωνο ABC, σημείο K της ευθείας BC διαφορετικό από τα B και C, σημείο L της ευθείας AC διαφορετικό από τα A και C και σημείο M της ευθείας AB διαφορετικό από τα A και B. Οι ευθείες AK, BL και CM διέρχονται από το ίδιο σημείο αν και μόνον αν $\frac{BK}{KC}\frac{CL}{LA}\frac{AM}{MB} = 1$, όπου και οι τρεις λόγοι $\frac{BK}{KC}$, $\frac{CL}{LA}$ και $\frac{AM}{MB}$ είναι προσημασμένοι.

ΤΕΤΑΡΤΗ, 8-11-06, 11-12.

Το επόμενο λήμμα είναι επέκταση του λήμματος 2.

Λήμμα 5. Έστω τρίγωνο ABC με $\widehat{A} \neq 90^o$ και BL, CM δύο από τα ύψη του. Τότε $\frac{AM}{AL} = \frac{AC}{AB}$.

Διακρίνοντας τις περιπτώσεις του οξυγώνιου, του ορθογώνιου και του αμβλυγώνιου τριγώνου και χρησιμοποιώντας το γενικευμένο θεώρημα του Ceva και το λήμμα 5, αποδείξαμε το

Θεώρημα 26. Τα ύψη οποιουδήποτε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Το επόμενο λήμμα 6 είναι επέκταση του λήμματος 3. Χρησιμοποιώντας το λήμμα 6, αποδείξαμε με δεύτερο τρόπο το θεώρημα 26.

Λήμμα 6. Έστω τρίγωνο ABC με $\widehat{A} \neq 90^o$ και BL, CM δύο από τα ύψη του με σημείο τομής το H. Τότε τα σημεία M και L ανήκουν στον κύκλο με διάμετρο το BC καθώς και στον κύκλο με διάμετρο το AH.

Ορισμός 8. Το σημείο τομής των υψών ενός τριγώνου ονομάζεται *ορθόκεντρο* του τριγώνου.

Άσκηση 10. Έστω H το ορθόκεντρο ενός τριγώνου ABC. Αποδείξτε ότι το A είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου HBC, ότι το B είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου HCA και το C είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου HAB.

Άσκηση 11. Έστω H το ορθόκεντρο ενός τριγώνου ABC και AH_a, BH_b και CH_c τα τρία ύψη του. Το τρίγωνο $H_aH_bH_c$ ονομάζεται *ορθικό τρίγωνο* του ABC. Αποδείξτε ότι, αν το ABC είναι οξυγώνιο, το H είναι το έγκεντρο του ορθικού τριγώνου.

Άσκηση 12. Έστω τρίγωνο ABC και AM_a, BM_b και CM_c οι τρεις διάμεσοί του. Από το M_c φέρτε ευθύγραμμο τμήμα M_cK παράλληλο και ίσο με το BM_b ώστε τα δύο αυτά ευθ. τμήματα να είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο της ευθείας AB. Αποδείξτε ότι $KC = AM_a$ και ότι $(CM_cK) = \frac{3}{4}(ABC)$.

Το τελευταίο αποτέλεσμα διατυπώνεται ως εξής: το τρίγωνο με πλευρές ίσες με τις διαμέσους του ABC έχει εμβαδό ίσο με τα τρία τέταρτα του εμβαδού του ABC.

Άσκηση 13. Έστω τρίγωνο ABC, AH_a το ύψος του και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του. Αποδείξτε ότι $bc = 2R \cdot AH_a$.

Άσκηση 14. Έστω I το έγκεντρο του τριγώνου ABC, IK_a η κάθετη στην BC, IK_b η κάθετη στην CA και IK_c η κάθετη στην AB. Αποδείξτε ότι οι AK_a, BK_b και CK_c διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό ονομάζεται *σημείο Gergonne* του τριγώνου.

Άσκηση 15. Έστω τρίγωνο ABC, s η ημιπερίμετρός του και r η ακτίνα του εγγεγραμμένου του κύκλου. Αποδείξτε ότι $(ABC) = sr$.

Άσκηση 16. Έστω τρίγωνο ABC και AH_a, BH_b και CH_c τα τρία ύψη του. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ABC, AH_bH_c, BH_cH_a και CH_aH_b είναι όλα όμοια μεταξύ τους.

ΔΕΥΤΕΡΑ, 13-11-06, 11-13.

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 5, αποδείξαμε το

Θεώρημα 27. Σε κάθε τρίγωνο η διχοτόμος οποιασδήποτε γωνίας του και οι διχοτόμοι των δύο άλλων εξωτερικών γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Άσκηση 17. Αποδείξτε το Θεώρημα 27 χρησιμοποιώντας το γενικευμένο θεώρημα του Ceva.

Ορισμός 9. Το σημείο τομής της διχοτόμου μίας γωνίας τριγώνου με τις διχοτόμους των δύο απέναντι εξωτερικών γωνιών του ονομάζεται *παράκεντρο* του τριγώνου που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη γωνία.

Έτσι, ένα τρίγωνο έχει ένα έγκεντρο (στο εσωτερικό του) και τρία παράκεντρα (στο εξωτερικό του).

Άσκηση 18. Έστω τρίγωνο ABC και I, I_a, I_b και I_c το έγκεντρο και τα τρία παράκεντρά του. Αποδείξτε ότι καθένα από αυτά τα σημεία είναι ορθόκεντρο του τριγώνου που σχηματίζεται από τα υπόλοιπα τρία.

Άσκηση 19. Έστω τρίγωνο ABC, H το ορθόκεντρό του και AH_a, BH_b και CH_c τα τρία ύψη του. Αποδείξτε ότι τα σημεία A, B, C και H είναι το έγκεντρο και τα παράκεντρα του ορθικού τριγώνου $H_aH_bH_c$.

Θεώρημα 28. Έστω τρίγωνο ABC, I_a το παράκεντρο που αντιστοιχεί στην κορυφή A και I_aK, I_aL, I_aM οι κάθετες στις ευθείες BC, AC, AB, αντιστοίχως. Το I_a είναι κέντρο κύκλου ο οποίος εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου στα σημεία K, L, M.

Ορισμός 10. Ο κύκλος που περιγράφεται στο Θεώρημα 28 ονομάζεται *παρεγγεγραμμένος κύκλος* του ABC που αντιστοιχεί στην κορυφή A.

Επομένως, κάθε τρίγωνο έχει έναν εγγεγραμμένο κύκλο και τρεις παρεγγεγραμμένους κύκλους.

Θεώρημα 28. Έστω τρίγωνο ABC, I_a το παράκεντρο που αντιστοιχεί στην κορυφή A και I_aK, I_aL, I_aM οι κάθετες στις ευθείες BC, AC, AB, αντιστοίχως. Αν s είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου, τότε $BK = BM = s - c$, $CK = CL = s - b$ και $AM = AL = s$.

Άσκηση 20. Έστω τρίγωνο ABC, I_a το παράκεντρο που αντιστοιχεί στην κορυφή A και I_aK, I_aL, I_aM οι κάθετες στις ευθείες BC, AC, AB, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι οι ευθείες AK, BL και CM διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Άσκηση 21. Έστω τρίγωνο ABC, s η ημιπερίμετρός του, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου και r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου. Αποδείξτε ότι $abc = 4srR$.

Άσκηση 22. Έστω τρίγωνο ABC, s η ημιπερίμετρός του και r, r_a, r_b, r_c οι ακτίνες του εγγεγραμμένου και των τριών παρεγγεγραμμένων κύκλων. Αποδείξτε ότι
(i) $(ABC) = (s-a)r_a = (s-b)r_b = (s-c)r_c$.

(ii) $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

ΙΣΟΣΚΕΛΗ ΤΡΙΓΩΝΑ.

Αποδείξαμε τα εξής τρία θεωρήματα.

Θεώρημα 29. Έστω τρίγωνο ABC και BH_b και CH_c δύο από τα ύψη του.
(i) Αν $AB = AC$, τότε $CH_c = BH_b$.
(ii) Αν $AB < AC$, τότε $CH_c > BH_b$.
(iii) Αν $AB > AC$, τότε $CH_c < BH_b$.

Πόρισμα 6. Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνον αν δύο από τα ύψη του είναι ίσα.

Θεώρημα 30. Έστω τρίγωνο ABC και BM_b και CM_c δύο από τις διαμέσους του.
(i) Αν $AB = AC$, τότε $CM_c = BM_b$.
(ii) Αν $AB < AC$, τότε $CM_c > BM_b$.
(iii) Αν $AB > AC$, τότε $CM_c < BM_b$.

Πόρισμα 7. Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνον αν δύο από τις διαμέσους του είναι ίσες.

Θεώρημα 31. Έστω τρίγωνο ABC και BD_b και CD_c δύο από τις διχοτόμους του.
(i) Αν $AB = AC$, τότε $CD_c = BD_b$.
(ii) Αν $AB < AC$, τότε $CD_c > BD_b$.
(iii) Αν $AB > AC$, τότε $CD_c < BD_b$.

Πόρισμα 8. Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνον αν δύο από τις διχοτόμους του είναι ίσες.

Και στα τρία θεωρήματα το ουσιαστικό μέρος είναι το (ii). Η απόδειξη του Θεωρήματος 29(ii) είναι απλή και χρησιμοποιεί την ομοιότητα των τριγώνων ABH_b και ACH_c. Η απόδειξη του Θεωρήματος 30(ii) είναι επίσης απλή και βασίσθηκε στο Θεώρημα 13 και στο Θεώρημα 18. Η απόδειξη, όμως, του Θεωρήματος 31(ii) είναι σαφώς πιο δύσκολη και βασίσθηκε στο Θεώρημα 7.

Άσκηση 23. Έστω τρίγωνο ABC με $\widehat{B} = 12^o$ και $\widehat{C} = 132^o$. Αν η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας B τέμνει την ευθεία AC στο K και η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας C τέμνει την ευθεία AB στο L, αποδείξτε ότι $BK = CL$.

ΤΕΤΑΡΤΗ, 15-11-06, 11-12.

ΕΥΘΕΙΑ EULER.

Λήμμα 7. Έστω τρίγωνο ABC, H το ορθόκεντρό του και A' το αντιδιαμετρικό σημείο του A στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου. Τότε το $HCA'B$ είναι παραλληλόγραμμο και, επομένως, το HA' διέρχεται από το μέσον της πλευράς BC.

Βάσει του Λήμματος 7 αποδείξαμε το

Λήμμα 8. Έστω τρίγωνο ABC, H το ορθόκεντρό του και O το περίκεντρό του. Αν M_a είναι το μέσον της πλευράς BC, τότε $AH = 2 \cdot OM_a$.

Άσκηση 24. Έστω τρίγωνο ABC, H το ορθόκεντρό του και O το περίκεντρό του. Αν M_a είναι το μέσον της πλευράς BC, M_b είναι το μέσον της πλευράς AC και Θ_c το μέσον του CH, αποδείξτε ότι το $OM_a\Theta_cM_b$ είναι παραλληλόγραμμο. Κατόπιν, με βάση αυτό το αποτέλεσμα αποδείξτε με δεύτερο τρόπο το Λήμμα 8.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 8, αποδείξαμε το

Θεώρημα 32. Έστω τρίγωνο ABC, H το ορθόκεντρό του, G το βαρύκεντρό του και O το περίκεντρό του.
(i) Αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, τα τρία αυτά σημεία ταυτίζονται ενώ, αν το τρίγωνο δεν είναι ισόπλευρο, τα τρία αυτά σημεία είναι διαφορετικά.
(ii) Αν το ABC δεν είναι ισόπλευρο, τότε τα σημεία H, G και O είναι επί της ίδιας ευθείας, το G βρίσκεται ανάμεσα στα H και O και $HG = 2 \cdot GO$.

Ορισμός 11. Η ευθεία η οποία διέρχεται από το ορθόκεντρο, το βαρύκεντρο και το περίκεντρο ενός μη ισοπλεύρου τριγώνου ονομάζεται *ευθεία Euler* του τριγώνου.

Άσκηση 25. Έστω τρίγωνο ABC, H το ορθόκεντρό του και O το περίκεντρό του. Αποδείξτε ότι $\widehat{HAO} = |\widehat{B} - \widehat{C}|$.

ΔΕΥΤΕΡΑ, 20-11-06, 11-13.

ΚΥΚΛΟΣ ΤΩΝ ΕΝΝΕΑ ΣΗΜΕΙΩΝ.

Θεώρημα 33. Έστω τρίγωνο ABC, H το ορθόκεντρό του και O το περίκεντρό του, AH_a, BH_b και CH_c τα τρία ύψη του, M_a, M_b και M_c τα μέσα των πλευρών του και Θ_a, Θ_b και Θ_c τα μέσα των AH, BH και CH αντιστοίχως. Τότε
(i) τα σημεία H_a, H_b, H_c, M_a, M_b, M_c, Θ_a, Θ_b, Θ_c ανήκουν στον ίδιο κύκλο,
(ii) τα $M_a\Theta_a$, $M_b\Theta_b$, $M_c\Theta_c$ είναι διάμετροι του κύκλου αυτού και
(iii) το κέντρο του κύκλου είναι το μέσον του τμήματος HO.

Ορισμός 12. Ο κύκλος στο θεώρημα 33 ονομάζεται *κύκλος των εννέα σημείων* του τριγώνου.

Άσκηση 26. Πόσα είναι στην πραγματικότητα τα εννέα σημεία του θεωρήματος 33, αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές ή αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο?

Άσκηση 27. Χρησιμοποιώντας τα σύμβολα του θεωρήματος 33, αποδείξτε ότι το σημείο Θ_a είναι το μέσον του τόξου H_bH_c του κύκλου των εννέα σημείων.

Άσκηση 28. Αποδείξτε ότι η ακτίνα του κύκλου των εννέα σημείων ενός τριγώνου είναι ίση με το μισό της ακτίνας του περιγεγραμμένου του κύκλου.

Άσκηση 29. Έστω τρίγωνο ABC και AH_a το ύψος του. Αποδείξτε ότι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη του κύκλου των εννέα σημείων του ABC στο σημείο H_a με την πλευρά BC είναι ίση με $|\widehat{B}-\widehat{C}|$.

ΔΥΝΑΜΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟ.

Ορισμός 13. Έστω κύκλος κέντρου O και ακτίνας R και σημείο A. Η ποσότητα AO^2-R^2 ονομάζεται *δύναμη του σημείου ως προς τον κύκλο*.

Είναι προφανές ότι η δύναμη σημείου ως προς κύκλο είναι θετική ή μηδέν ή αρνητική αν το σημείο είναι εξωτερικό του κύκλου ή ανήκει στον κύκλο ή είναι εσωτερικό του κύκλου αντιστοίχως.

Θεώρημα 34. Έστω κύκλος και σημείο A εσωτερικό ή εξωτερικό του κύκλου. Από το A φέρνουμε μεταβλητή ευθεία ώστε αυτή να τέμνει τον κύκλο (ή να εφάπτεται του κύκλου) και έστω K και K' τα σημεία τομής της (ή τα σημεία επαφής της) με τον κύκλο. (Αν το A είναι εσωτερικό του κύκλου, η ευθεία έχει πάντοτε δύο διαφορετικά σημεία τομής με τον κύκλο. Αν το A είναι εξωτερικό του κύκλου, υπάρχουν δύο θέσεις της ευθείας όπου αυτή εφάπτεται του κύκλου και τότε τα σημεία K, K' ταυτίζονται και για κάθε άλλη θέση της ευθείας είτε αυτή δεν τέμνει τον κύκλο είτε αυτή τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία.) Τότε το γινόμενο $AK \cdot AK'$ είναι σταθερό (δηλαδή, ανεξάρτητο της θέσης της ευθείας) και ίσο με την απόλυτη τιμή της δύναμης του A ως προς τον κύκλο.

Ορισμός 14. Έστω ευθύγραμμα τμήματα AB και CD επί της ίδιας ευθείας. Το *προσημασμένο γινόμενο* $AB \cdot CD$ είναι απλώς το γινόμενο των μηκών των τμημάτων με πρόσημο $+$, αν αυτά είναι ομόρροπα, ή με πρόσημο $-$, αν αυτά είναι αντίρροπα.

Είναι προφανές ότι το επόμενο αποτελεί αναδιατύπωση του προηγούμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 34. Έστω κύκλος και σημείο A εσωτερικό ή εξωτερικό του κύκλου. Από το A φέρνουμε μεταβλητή ευθεία ώστε αυτή να τέμνει τον κύκλο (ή να εφάπτεται του κύκλου) και έστω K και K' τα σημεία τομής της (ή τα σημεία επαφής της) με τον κύκλο. Τότε το προσημασμένο γινόμενο $AK \cdot AK'$ είναι σταθερό (δηλαδή, ανεξάρτητο της θέσης της ευθείας) και ίσο με τη δύναμη του A ως προς τον κύκλο.

Άσκηση 30. Έστω σταθερά σημεία A, B και C επί της ίδιας ευθείας ώστε το B να είναι ανάμεσα στα A και C. Ονομάζουμε Π_1 και Π_2 τα δύο ημιεπίπεδα της ευθείας ABC. Θεωρούμε μεταβλητό κύκλο $\mathcal{C}$ ο οποίος διέρχεται από τα σημεία B και C. Για κάθε τέτοιο κύκλο φέρνουμε τις εφαπτόμενες AT_1 και AT_2 από το A ώστε το T_1 να είναι στο Π_1 και το T_2 στο Π_2. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου T_1 και τον γεωμετρικό τόπο του T_2 για όλες τις δυνατές θέσεις του $\mathcal{C}$. Περιγράψτε την κίνηση των T_1 και T_2 καθώς το κέντρο του $\mathcal{C}$ κινείται επί της μεσοκαθέτου του τμήματος BC προς την ίδια κατεύθυνση από το ένα “άπειρο” σημείο της μέχρι το άλλο “άπειρο” σημείο της.

ΤΕΤΑΡΤΗ, 22-11-06, 11-12.

Λήμμα 9. Έστω τρίγωνο ABC με $\widehat{A} = 90^o$ και το ύψος AH_a. Τότε
(i) $BH_a \cdot BC = BA^2$, $CH_a \cdot CB = CA^2$ και
(ii) $AH_a^2 = BH_a \cdot CH_a$.

Άσκηση 31. Έστω ότι δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα PQ και RS. Περιγράψτε γεωμετρική κατασκευή (δηλαδή, με κανόνα και διαβήτη) ευθυγράμμου τμήματος μήκους $\sqrt{PQ \cdot RS}$.

Άσκηση 32. Έστω ότι δίνεται ευθύγραμμο τμήμα PQ. Περιγράψτε γεωμετρική κατασκευή ευθυγράμμου τμήματος μήκους $\sqrt{PQ}$.

Άσκηση 33. Έστω ευθεία ϵ, σημείο A της ϵ και αριθμός α. Ακολουθώντας τα επόμενα βήματα περιγράψτε την δέσμη $\mathcal{C}$ όλων των κύκλων των οποίων τα κέντρα είναι επί της ϵ και η δύναμη του A ως προς αυτούς είναι ίση με α.
(i) Αν $\alpha = 0$, τότε η $\mathcal{C}$ περιέχει ακριβώς όλους τους κύκλους με κέντρο επί της ϵ οι οποίοι διέρχονται από το A.
(ii) Αν $\alpha < 0$, κατασκευάστε σημεία K_1 και K_2 επί της ευθείας της κάθετης στην ϵ στο A ώστε $AK_1 = AK_2 = \sqrt{|\alpha|}$. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{C}$ περιέχει ακριβώς όλους τους κύκλους οι οποίοι διέρχονται από τα σημεία K_1 και K_2.
(iii) Αν $\alpha > 0$, κατασκευάστε σημεία P_1 και P_2 επί της ϵ ώστε $AP_1 = AP_2 = \sqrt{\alpha}$.

Αποδείξτε ότι για κάθε σημείο K της ϵ ανάμεσα στα A και P_1 υπάρχει μοναδικό σημείο K' της ϵ ώστε το P_1 να είναι ανάμεσα στα A και K' και ο κύκλος διαμέτρου KK' να ανήκει στην $\mathcal{C}$. Αποδείξτε ότι, αντιστρόφως, για κάθε σημείο K' της ϵ ώστε το P_1 να είναι ανάμεσα στα A και K' υπάρχει μοναδικό σημείο K της ϵ ανάμεσα στα A και P_1 ώστε ο κύκλος διαμέτρου KK' να ανήκει στην $\mathcal{C}$. Αν το K κινείται από το σημείο P_1 προς το A, αποδείξτε ότι το αντίστοιχο σημείο K' κινείται από το P_1 προς το "άπειρο" σημείο της ημιευθείας AP_1. Δημιουργείται έτσι ένα σύνολο κύκλων $\mathcal{C}_1$ με διαμέτρους επί της ημιευθείας AP_1, εξωτερικό σημείο το A και εσωτερικό σημείο το P_1.

Περιγράψτε το ανάλογο σύνολο κύκλων $\mathcal{C}_2$ με διαμέτρους επί της ημιευθείας AP_2, εξωτερικό σημείο το A και εσωτερικό σημείο το P_2.

Τέλος, αποδείξτε ότι $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 9, αποδείξαμε το

Πυθαγόρειο Θεώρημα. Έστω τρίγωνο ABC με $\widehat{A} = 90^o$. Τότε

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Θεώρημα 35. Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB και αριθμός α. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων K τα οποία έχουν την ιδιότητα $KA^2 - KB^2 = \alpha$ είναι η ευθεία η οποία είναι κάθετη στην ευθεία AB στο μοναδικό σημείο της L με την ιδιότητα $LA^2 - LB^2 = \alpha$.

ΔΕΥΤΕΡΑ, 27-11-06, 11-13.

Θεώρημα 36. Έστω δύο κύκλοι διαφορετικών κέντρων O_1 και O_2 και ακτίνων R_1 και R_2. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τα οποία έχουν ίσες δυνάμεις ως προς τους δύο κύκλους είναι η ευθεία η οποία είναι κάθετη στην ευθεία O_1O_2 στο σημείο της L με την ιδιότητα $LO_1^2 - LO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$.

Ορισμός 15. Έστω δύο κύκλοι διαφορετικών κέντρων. Η ευθεία η οποία αποτελείται από τα σημεία με ίσες δυνάμεις ως προς αυτούς ονομάζεται *ριζικός άξονας* των δύο κύκλων.

Άσκηση 34. Έστω δύο κύκλοι με το ίδιο κέντρο. Αποδείξτε ότι, αν οι ακτίνες τους είναι ίσες, τότε όλα τα σημεία έχουν ίσες δυνάμεις ως προς αυτούς ενώ, αν οι ακτίνες τους είναι διαφορετικές, τότε κανένα σημείο δεν έχει ίσες δυνάμεις ως προς αυτούς.

Άσκηση 35. Έστω δύο κύκλοι με διαφορετικά κέντρα. Αν οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία, αποδείξτε ότι ο ριζικός τους άξονας είναι η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία τομής τους. Αν οι δύο κύκλοι εφάπτονται, αποδείξτε ότι ο ριζικός τους άξονας είναι η κοινή τους εφαπτόμενη ευθεία. Αν οι δύο κύκλοι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο (οπότε είτε ο ένας είναι στο εσωτερικό του άλλου είτε καθένας τους είναι στο εξωτερικό του άλλου), αποδείξτε ότι ο ριζικός τους άξονας είναι (ολόκληρος) στο εξωτερικό και των δύο κύκλων.

Άσκηση 36. Έστω δύο κύκλοι με διαφορετικά κέντρα. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων με ίσες εφαπτόμενες προς τους δύο κύκλους. (Να διακρίνετε περιπτώσεις σε σχέση με το αν οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία ή εφάπτονται ή δεν έχουν κοινό σημείο.)

Άσκηση 37. Θεωρήστε δύο κύκλους καθένας εκ των οποίων είναι στο εξωτερικό του άλλου και τα τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία εφάπτονται των δύο κύκλων στα άκρα τους. Αποδείξτε ότι τα τέσσερα μέσα των τμημάτων αυτών ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Θεώρημα 37. Έστω τρείς κύκλοι των οποίων τα κέντρα δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία. Τότε οι τρεις ριζικοί τους άξονες διέρχονται από το ίδιο σημείο. Αυτό το σημείο είναι το μοναδικό σημείο με ίσες δυνάμεις ως προς τους τρεις κύκλους.

Ορισμός 16. Έστω τρείς κύκλοι των οποίων τα κέντρα δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία. Το σημείο με ίσες δυνάμεις ως προς τους τρεις κύκλους ονομάζεται *ριζικό κέντρο* των τριών κύκλων.

Άσκηση 38. Έστω δύο κύκλοι οι οποίοι εφάπτονται στο σημείο T και ένας από αυτούς είναι στο εσωτερικό του άλλου. Θεωρούμε χορδή του μεγαλύτερου κύκλου η οποία εφάπτεται του μικρότερου σε σημείο P. Αποδείξτε ότι η TP είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ATB}$.

Άσκηση 39. Έστω τρίγωνο ABC και H το ορθόκεντρό του. Πάρτε τυχόν σημείο K επί της ευθείας BC και αποδείξτε ότι η τιμή της δύναμης του H ως προς τον κύκλο διαμέτρου AK είναι ανεξάρτητη του K.

Άσκηση 40. Έστω τρίγωνο ABC, H το ορθόκεντρό του και σημεία K, L και M των ευθειών BC, CA και AB αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι το H έχει ίσες δυνάμεις ως προς τους κύκλους με διαμέτρους AK, BL και CM.

Άσκηση 41. Έστω τρίγωνο ABC και σημεία K, L και M των ευθειών BC, CA και AB αντιστοίχως ώστε τα τρία αυτά σημεία να ανήκουν στην ίδια ευθεία. Αποδείξτε ότι τα ορθόκεντρα των τριγώνων ABC, ALM, BKM και CKL ανήκουν στην ίδια ευθεία.

ΕΥΘΕΙΑ SIMSON.

Θεώρημα 38. Έστω τρίγωνο ABC, σημείο P του περιγεγραμμένου του κύκλου και PA_1, PB_1 και PC_1 οι κάθετες στις ευθείες BC, CA και AB αντιστοίχως. Τότε τα σημεία A_1, B_1 και C_1 ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Ορισμός 17. Έστω τρίγωνο ABC, σημείο P του περιγεγραμμένου του κύκλου και PA_1, PB_1 και PC_1 οι κάθετες στις ευθείες BC, CA και AB αντιστοίχως. Η ευθεία $A_1B_1C_1$ ονομάζεται *ευθεία Simson* του P ως προς το τρίγωνο ABC.

Άσκηση 42. Έστω τρίγωνο ABC και PA_1, PB_1 και PC_1 οι κάθετες από κάποιο σημείο P στις ευθείες BC, CA και AB αντιστοίχως. Αν τα A_1, B_1 και C_1 ανήκουν στην ίδια ευθεία, αποδείξτε ότι το P ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του ABC.

ΤΕΤΑΡΤΗ, 29-11-06, 11-12.

Λήμμα 10. Έστω τρίγωνο ABC, H το ορθόκεντρό του και AH_a το ύψος του. Έστω K_a το δεύτερο (εκτός του A) σημείο τομής της ευθείας AH_a με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου. Τότε η πλευρά BC διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα HK_a στο σημείο H_a.

Άσκηση 43. Έστω τρίγωνο ABC, τα ύψη AH_a, BH_b και CH_c και K_a, K_b και K_c τα δεύτερα σημεία τομής των υψών με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου. Αποδείξτε ότι το $K_aK_bK_c$ είναι όμοιο με το ορθικό τρίγωνο $H_aH_bH_c$ του ABC.

Άσκηση 44. Έστω τρίγωνο ABC και H το ορθόκεντρό του. Αποδείξτε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ABC, HBC, HCA και HAB έχουν όλοι την ίδια ακτίνα R.

Άσκηση 45. Έστω ότι τρεις κύκλοι με την ίδια ακτίνα διέρχονται από το ίδιο σημείο και ότι τέμνονται ανά δύο και στα σημεία A, B και C. Αποδείξτε ότι το αρχικό κοινό τους σημείο είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC.

Θεώρημα 39. Έστω τρίγωνο ABC, H το ορθόκεντρό του και σημείο P του περιγεγραμμένου του κύκλου. Τότε η ευθεία Simson του P ως προς το τρίγωνο διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα PH.

Άσκηση 46. Έστω τρίγωνο ABC και σημείο P του περιγεγραμμένου του κύκλου. Έστω PA_1 η κάθετη προς την πλευρά BC και A_2 το δεύτερο σημείο τομής (εκτός του P) της ευθείας PA_1 με τον περιγεγραμμένο κύκλο. Αποδείξτε ότι η AA_2 είναι παράλληλη με την ευθεία Simson του P ως προς το τρίγωνο.

Άσκηση 47. Έστω τρίγωνο ABC, O το περίκεντρό του και σημεία P και P' του περιγεγραμμένου του κύκλου. Αποδείξτε ότι η μικρότερη από τις δύο γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες Simson των P και P' ως προς το τρίγωνο είναι ίση με το μισό της γωνίας των ημιευθειών OP και OP'.

Άσκηση 48. Έστω τρίγωνο ABC και αντιδιαμετρικά σημεία P και P' του περιγεγραμμένου του κύκλου. Αποδείξτε ότι οι ευθείες Simson των P και P' ως προς το τρίγωνο είναι κάθετες και το σημείο τομής τους ανήκει στον κύκλο των εννέα σημείων του ABC.

ΔΕΥΤΕΡΑ, 4-12-06, 11-13.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 38, αποδείξαμε το

Θεώρημα του Πτολεμαίου. Έστω τετράπλευρο $ABCD$ όλες οι κορυφές του οποίου ανήκουν στον ίδιο κύκλο και με την κυκλική διάταξη $A \to B \to C \to D \to A$. Τότε $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΜΕΝΕΛΑΟΥ.

Θεώρημα του Μενελάου. Έστω τρίγωνο ABC και σημεία K, L, M των ευθειών BC, CA, AB αντιστοίχως κανένα εκ των οποίων δεν ταυτίζεται με κορυφή του τριγώνου. Τότε τα K, L, M ανήκουν στην ίδια ευθεία αν και μόνον αν $\frac{BK}{KC}\frac{CL}{LA}\frac{AM}{MB} = -1$, όπου όλοι οι λόγοι είναι προσημασμένοι.

Ως εφαρμογή του θεωρήματος του Μενελάου είδαμε τα δύο επόμενα θεωρήματα. Πριν τα αναφέρουμε πρέπει να κάνουμε την εξής παρατήρηση. Έστω τρίγωνο ABC και ϵ η ευθεία των διχοτόμων των δύο εξωτερικών γωνιών $\widehat{A}$. (Υπάρχουν δύο κατά κορυφήν εξωτερικές γωνίες και οι διχοτόμοι τους είναι αντικείμενες ημιευθείες με κοινή κορυφή το A.) Είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι η ϵ τέμνει την ευθεία BC αν και μόνον αν $AB \neq AC$.

Θεώρημα 40. Έστω οποιοδήποτε τρίγωνο ABC με $AB \neq AC$ και έστω BD_b, CD_c οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ και AD'_a η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\widehat{A}$. Τότε τα σημεία D'_a, D_b, D_c ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Θεώρημα 41. Έστω οποιοδήποτε μη ισοσκελές τρίγωνο ABC και έστω AD'_a, BD'_b, CD'_c οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$. Τότε τα σημεία D'_a, D'_b, D'_c ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Για την απόδειξη αυτών των θεωρημάτων εκτός από το θεώρημα του Μενελάου χρειαστήκαμε την εξής παραλλαγή του θεωρήματος 21.

Θεώρημα 42. Έστω τρίγωνο ABC με $AB \neq AC$ και AK η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\widehat{A}$. Τότε $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$.

ΤΕΤΑΡΤΗ, 6-12-06, 11-12.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Μενελάου, αποδείξαμε με δεύτερο τρόπο το θεώρημα 38.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΠΑΠΠΟΥ.

Θεώρημα του Πάππου. Έστω έξι διαφορετικά σημεία A, B, C, A', B' και C'. Υποθέτουμε ότι τα A,B, C ανήκουν σε μία ευθεία και ότι τα A', B', C' ανήκουν σε μία ευθεία διαφορετική από την προηγούμενη. Έστω A'' το σημείο τομής των ευθειών BC' και $B'C$, B'' το σημείο τομής των ευθειών AC' και $A'C$ και C'' το σημείο τομής των ευθειών AB' και $A'B$. Τότε τα σημεία A'', B'', C'' ανήκουν σε μία ευθεία.

Στις δύο επόμενες ασκήσεις βλέπουμε δύο επεκτάσεις του θεωρήματος του Πάππου.

Άσκηση 49. Από τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Πάππου αλλάξτε μία: έστω ότι οι ευθείες BC' και $B'C$ είναι παράλληλες. Τότε το συμπέρασμα του θεωρήματος θα αλλάξει σε: η ευθεία $B''C''$ είναι παράλληλη των BC', $B'C$.

Άσκηση 50. Από τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Πάππου αλλάξτε δύο: έστω ότι οι ευθείες BC' και $B'C$ είναι παράλληλες και ότι οι ευθείες AC' και $A'C$ είναι παράλληλες. Τότε το συμπέρασμα του θεωρήματος θα αλλάξει σε: οι ευθείες AB' και $A'B$ είναι παράλληλες.

Άσκηση 51. Έστω έξι διαφορετικά σημεία A, B, C, A', B' και C'. Υποθέτουμε ότι οι ευθείες AB', BC', CA' διέρχονται από ένα σημείο και ότι οι ευθείες AC', CB', BA' διέρχονται από ένα άλλο σημείο διαφορετικό από το προηγούμενο. Αποδείξτε ότι και οι ευθείες AA', BB', CC' διέρχονται από ένα σημείο. (Υπόδειξη: Έστω το σημείο τομής των ευθειών AB', BC', CA' και το σημείο τομής των ευθειών AC', CB', BA'. Εφαρμόστε το θεώρημα του Πάππου, θεωρώντας τις τριάδες συνευθειακών σημείων K, A, B' και M, B, A'.)

Άσκηση 52. Έστω παραλληλόγραμμο $ABCD$ και τυχαία σημεία K,L στις πλευρές AB, CD αντιστοίχως. Έστω M το σημείο τομής των AL και DK και N το σημείο τομής των BL και CK. Αν η ευθεία MN τέμνει την AD στο P και την BC στο Q, αποδείξτε ότι $AP = QC$.

ΔΕΥΤΕΡΑ, 11-12-06, 11-13.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ DESARGUES.

Θεώρημα του Desargues. Έστω τρίγωνα ABC και $A'B'C'$ με την ιδιότητα ότι οι ευθείες AA', BB', CC' διέρχονται από το ίδιο σημείο. Αν A'' είναι το σημείο τομής των BC και $B'C'$, B'' είναι το σημείο τομής των CA και $C'A'$ και C'' είναι το σημείο τομής των AB και $A'B'$, τότε τα A'', B'', C'' ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Αντίστροφο Θεώρημα του Desargues. Έστω τρίγωνα ABC και $A'B'C'$ και A'' το σημείο τομής των BC και $B'C'$, B'' το σημείο τομής των CA και $C'A'$ και C'' το σημείο τομής των AB και $A'B'$. Αν τα A'', B'', C'' ανήκουν στην ίδια ευθεία, τότε οι ευθείες AA', BB', CC' διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Άσκηση 53. Έστω τρίγωνα ABC και $A'B'C'$ με την ιδιότητα ότι οι ευθείες AA', BB', CC' διέρχονται από το ίδιο σημείο. Αν οι ευθείες BC και $B'C'$ είναι παράλληλες και οι CA και $C'A'$ είναι, επίσης, παράλληλες, αποδείξτε ότι και οι AB και $A'B'$ είναι παράλληλες.

Άσκηση 54. Θεωρήστε δύο ευθείες ϵ και ϵ' οι οποίες δεν είναι παράλληλες αλλά που το σημείο τομής τους βρίσκεται εκτός χαρτιού. Πάρτε και ένα σημείο P που δεν ανήκει στις ϵ και ϵ' και περιγράψτε γεωμετρική κατασκευή της ευθείας που διέρχεται από το ορατό σημείο P και από το αόρατο σημείο τομής των δύο ευθειών.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ PASCAL.

Θεώρημα του Pascal. Έστω σημεία A, B, C, D, E και F όλα στον ίδιο κύκλο και K το σημείο τομής των AB και DE, L το σημείο τομής των BC και EF και M το σημείο τομής των CD και FA. Τότε τα σημεία K, L, M ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Αναφέραμε (χωρίς απόδειξη) ότι το θεώρημα του Pascal ισχύει με την ίδια ακριβώς διατύπωση αν αντικαταστήσουμε τον κύκλο με οποιαδήποτε κωνική τομή (έλλειψη, παραβολή, υπερβολή). Σ' αυτό το πλαίσιο ισχύει και το αντίστροφο του θεωρήματος του Pascal.

Άσκηση 55. Έστω σημεία A, B, C, D και E όλα στον ίδιο κύκλο και K το σημείο τομής των AB και DE, L το σημείο τομής της BC και της εφαπτομένης του κύκλου στο E και M το σημείο τομής των CD και EA. Αποδείξτε ότι τα σημεία K, L, M ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Άσκηση 56. Έστω σημεία A, B, C και D όλα στον ίδιο κύκλο και K το σημείο τομής των AB και CD, L το σημείο τομής της BC και της εφαπτομένης του κύκλου στο D και M το σημείο τομής της AD και της εφαπτομένης του κύκλου στο C. Αποδείξτε ότι τα σημεία K, L, M ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Άσκηση 57. Έστω σημεία A, B, C και D όλα στον ίδιο κύκλο και K το σημείο τομής των AB και CD, L το σημείο τομής των BC και AD και M το σημείο τομής των εφαπτομένων του κύκλου στα σημεία A και C. Αποδείξτε ότι τα σημεία K, L, M ανήκουν στην ίδια ευθεία.

ΤΕΤΑΡΤΗ, 13-12-06, 11-12.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟ.

Ορισμός 18. Έστω κύκλος $\mathcal{C}$ κέντρου O και ακτίνας k. Για κάθε σημείο P του επιπέδου διαφορετικό από το O θεωρούμε εκείνο το σημείο S, το οποίο ανήκει στην ημιευθεία που έχει κορυφή το O και περιέχει το P, με την ιδιότητα: $OS \cdot OP = k^2$.

Το S ονομάζεται *αντίστροφο του P ως προς τον κύκλο $\mathcal{C}$*.

Ο μετασχηματισμός του επιπέδου ο οποίος σε κάθε σημείο διαφορετικό από το O αντιστοιχίζει το αντίστροφό του ως προς τον κύκλο $\mathcal{C}$ ονομάζεται *αντιστροφή ως προς τον κύκλο $\mathcal{C}$*.

Αν συμβολίσουμε E το επίπεδο, τότε η αντιστροφή ως προς τον $\mathcal{C}$ είναι μία απεικόνιση

$$E \setminus \{O\} \to E \setminus \{O\}\,.$$

Παρατηρούμε ότι, αν ένα σημείο πλησιάζει το O, τότε το αντίστροφό του απομακρύνεται από το O έτσι ώστε η απόστασή του από το O να απειρίζεται. Επίσης, αν ένα σημείο απομακρύνεται από το O ώστε η απόστασή του από το O να απειρίζεται, τότε το αντίστροφό του πλησιάζει προς το O. Βάσει αυτών οι επόμενοι δύο ορισμοί είναι φυσιολογικοί.

Ορισμός 19. Συμβολίζουμε ∞ και αποκαλούμε *άπειρο* ένα (φανταστικό) σημείο το οποίο επισυνάπτουμε στο E και το σύνολο $\overline{E} = E \cup \{\infty\}$ ονομάζουμε *επεκτεταμένο επίπεδο*. Λέμε ότι το ∞ έχει *άπειρη απόσταση* από οποιοδήποτε σημείο του E.

Ορισμός 20. Ορίζουμε ως αντίστροφο του σημείου O ως προς τον κύκλο $\mathcal{C}$ το σημείο ∞ και ως αντίστροφο του ∞ ως προς τον $\mathcal{C}$ το O. Έτσι επεκτείνεται ο μετασχηματισμός της αντιστροφής ως προς τον $\mathcal{C}$ σε ολόκληρο το $\overline{E}$.

Θεώρημα 43. Θεωρούμε την αντιστροφή ως προς τον κύκλο $\mathcal{C}$ ως απεικόνιση

$$\overline{E} \to \overline{E}\,.$$

1. Η αντιστροφή είναι είναι ένα - προς - ένα και επί. Δηλαδή, κάθε σημείο του $\overline{E}$ είναι αντίστροφο ως προς τον $\mathcal{C}$ ενός μοναδικού σημείου του $\overline{E}$.
2. Η σύνθεση της αντιστροφής με τον εαυτό της είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός. Δηλαδή, το αντίστροφο του αντιστρόφου οποιουδήποτε σημείου είναι το ίδιο το σημείο.
3. Κάθε σημείο εσωτερικό του $\mathcal{C}$ (συμπεριλαμβανομένου του O) απεικονίζεται σε σημείο εξωτερικό του $\mathcal{C}$ (συμπεριλαμβανομένου του ∞), κάθε σημείο εξωτερικό του $\mathcal{C}$ (συμπεριλαμβανομένου του ∞) απεικονίζεται σε σημείο εσωτερικό του $\mathcal{C}$ (συμπεριλαμβανομένου του O) και κάθε σημείο του $\mathcal{C}$ απεικονίζεται στον εαυτό του. Επομένως, τα σημεία του $\mathcal{C}$ είναι ακριβώς τα σταθερά σημεία του μετασχηματισμού.

Στο επόμενο λήμμα περιγράφεται η γεωμετρική κατασκευή του αντίστροφου σημείου.

Λήμμα 11. Έστω κύκλος $\mathcal{C}$ κέντρου και ακτίνας k.

1. Αν το P είναι εσωτερικό σημείο του $\mathcal{C}$ διαφορετικό από το O, φέρουμε κάθετη προς το OP στο σημείο P η οποία τέμνει τον κύκλο στο R και από το R φέρουμε εφαπτόμενη του κύκλου η οποία τέμνει την ευθεία OP στο S. Τότε το S είναι το αντίστροφο του P ως προς τον $\mathcal{C}$.
2. Αν το P είναι εξωτερικό σημείο του $\mathcal{C}$ διαφορετικό από το ∞, φέρουμε εφαπτόμενη από το P προς τον $\mathcal{C}$ και έστω R το σημείο επαφής. Από το R φέρουμε την κάθετη RS προς το OP. Τότε το S είναι το αντίστροφο του P ως προς τον $\mathcal{C}$.

Άσκηση 58. Έστω κύκλος $\mathcal{C}$ κέντρου O και ακτίνας k. Αποδείξτε τη *συνέχεια* της αντιστροφής ως προς τον $\mathcal{C}$. Δηλαδή, πάρτε οποιοδήποτε σημείο P του επιπέδου διαφορετικό από το O και ένα δεύτερο μεταβλητό σημείο P' το οποίο κινείται προς το P. Αν S και S' είναι τα αντίστροφα των P και P' ως προς τον $\mathcal{C}$, αποδείξτε ότι το μεταβλητό σημείο S' κινείται προς το S. Αν θέλετε η απόδειξή σας να είναι αυστηρή, αποδείξτε πρώτα ότι $SS' = \frac{k^2 \cdot PP'}{OP \cdot OP'}$.

ΔΕΥΤΕΡΑ, 18-12-06, 11-13.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΙ ΚΥΚΛΟΙ.

Ορισμός 21. Κάθε κύκλος καθώς και κάθε ευθεία μαζί με το σημείο ∞ ονομάζεται *γενικευμένος κύκλος*.

Οι γενικευμένοι κύκλοι είναι υποσύνολα του $\overline{E}$ και διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: οι γενικευμένοι κύκλοι οι οποίοι είναι υποσύνολα του E (δηλαδή, δεν περιέχουν το ∞) είναι οι κύκλοι ενώ οι γενικευμένοι κύκλοι οι οποίοι περιέχουν το ∞ είναι οι ευθείες μαζί με το ∞.

Θεώρημα 44. Θεωρούμε την αντιστροφή ως προς έναν κύκλο $\mathcal{C}$ κέντρου O. Αυτή απεικονίζει γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους.

Πιο συγκεκριμένα: (i) κάθε γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από το O και από το ∞ (δηλαδή, ευθεία μαζί με το ∞ που διέρχεται από το O) απεικονίζεται στον εαυτό του, (ii) κάθε γενικευμένος κύκλος που διέρχεται από το O αλλά όχι από το ∞ (δηλαδή, κύκλος που διέρχεται από το O) απεικονίζεται σε γενικευμένο κύκλο που διέρχεται από το ∞ αλλά όχι από το O (δηλαδή, σε ευθεία μαζί με το ∞ που δεν διέρχεται από το O) και αντιστρόφως και (iii) κάθε γενικευμένος κύκλος που δεν διέρχεται από το O ούτε από το ∞ (δηλαδή, κύκλος που δεν διέρχεται από το O) απεικονίζεται σε γενικευμένο κύκλο που δεν διέρχεται από το O ούτε από το ∞ (δηλαδή, κύκλο που δεν διέρχεται από το O).

Ορισμός 22. Δύο διαφορετικοί γενικευμένοι κύκλοι έχουν είτε δύο κοινά σημεία είτε ένα κοινό σημείο είτε κανένα κοινό σημείο. Στην πρώτη περίπτωση ονομάζονται *τεμνόμενοι*, στην δεύτερη περίπτωση ονομάζονται *εφαπτόμενοι* και στην τρίτη περίπτωση ονομάζονται *μη τεμνόμενοι*.

Για παράδειγμα, δύο παράλληλες ευθείες μαζί με το ∞ είναι εφαπτόμενες αφού έχουν το ∞ ως μόνο κοινό σημείο.

Θεώρημα 45. Η αντιστροφή ως ένα - προς - ένα απεικόνιση απεικονίζει τεμνόμενους γενικευμένους κύκλους σε τεμνόμενους γενικευμένους κύκλους, εφαπτόμενους γενικευμένους κύκλους σε εφαπτόμενους γενικευμένους κύκλους και μη τεμνόμενους γενικευμένους κύκλους σε μη τεμνόμενους γενικευμένους κύκλους.

ΤΕΤΑΡΤΗ, 20-12-06, 11-12.

Ορισμός 23. Έστω δύο γενικευμένοι κύκλοι $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$.
(i) Αν οι $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ ταυτίζονται, ορίζουμε την *γωνία* τους να είναι 0^o.
(ii) Αν οι $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ είναι παράλληλες ευθείες μαζί με το ∞, ορίζουμε την *γωνία* τους να είναι 0^o.
(iii) Αν οι $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ είναι είτε μία ευθεία μαζί με το ∞ και ένας εφαπτόμενος προς αυτήν κύκλος είτε δύο εφαπτόμενοι κύκλοι, ορίζουμε την *γωνία* τους να είναι 0^o.
(iv) Αν οι $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ είναι δύο τεμνόμενες ευθείες μαζί με το ∞, ορίζουμε την *γωνία* τους να είναι η (οξεία ή ορθή) γωνία που σχηματίζουν οι δύο ευθείες στο μοναδικό τους κοινό σημείο στο E (το άλλο κοινό τους σημείο είναι το ∞).
(v) Αν οι $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ είναι μία ευθεία μαζί με το ∞ και ένας κύκλος που τέμνει την ευθεία στα σημεία A και B, ορίζουμε την *γωνία* τους να είναι η (οξεία ή ορθή) γωνία που σχηματίζουν η ευθεία και η εφαπτόμενη ευθεία προς τον κύκλο είτε στο A είτε στο B.
(vi) Αν οι $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ είναι δύο κύκλοι που τέμνονται στα σημεία A και B, ορίζουμε την *γωνία* τους να είναι η (οξεία ή ορθή) γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες ευθείες προς τους κύκλους είτε στο A είτε στο B.

Παρατηρούμε ότι η γωνία δύο γενικευμένων κύκλων είναι 0^o αν και μόνον αν οι δύο γενικευμένοι κύκλοι ταυτίζονται ή εφάπτονται. Επίσης, η γωνία δύο γενικευμένων κύκλων είναι θετική και $\leq 90^o$ αν και μόνον αν οι δύο γενικευμένοι κύκλοι τέμνονται. Δεν ορίζεται γωνία μη τεμνόμενων γενικευμένων κύκλων.

Θεώρημα 46. Η αντιστροφή διατηρεί τις γωνίες των γενικευμένων κύκλων. Δηλαδή: αν $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ είναι οποιοιδήποτε γενικευμένοι κύκλοι είτε ταυτιζόμενοι είτε εφαπτόμενοι είτε τεμνόμενοι και $\mathcal{D}_1'$ και $\mathcal{D}_2'$ είναι οι εικόνες τους μέσω αντιστροφής (ως προς τον ίδιο κύκλο), τότε η γωνία των $\mathcal{D}_1'$ και $\mathcal{D}_2'$ είναι ίση με την γωνία των $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$.

ΔΕΥΤΕΡΑ, 8-1-07, 11-13.

Τελειώσαμε την απόδειξη του Θεωρήματος 46.

Ορισμός 24. Δύο γενικευμένοι κύκλοι ονομάζονται *ορθογώνιοι* αν η γωνία τους είναι ίση με 90°.

Θεώρημα 47. Δύο ευθείες μαζί με το ∞ είναι ορθογώνιες αν και μόνον αν σχηματίζουν ορθή γωνία στο μοναδικό κοινό τους σημείο στο E. Μία ευθεία μαζί με το ∞ και ένας κύκλος είναι ορθογώνιοι αν και μόνον αν η ευθεία διέρχεται από το κέντρο του κύκλου. Δύο κύκλοι είναι ορθογώνιοι αν και μόνον αν τέμνονται και οι δύο ακτίνες τους που περιέχουν ένα από τα δύο κοινά τους σημεία σχηματίζουν ορθή γωνία.

Θεώρημα 48. Θεωρούμε την αντιστροφή ως προς κύκλο $\mathcal{C}$. Οι γενικευμένοι κύκλοι οι οποίοι απεικονίζονται μέσω της αντιστροφής στον εαυτό τους είναι ο ίδιος ο $\mathcal{C}$ και οι ορθογώνιοι προς τον $\mathcal{C}$ και μόνον αυτοί.

Άσκηση 59. Έστω κύκλος $\mathcal{C}$ και δύο διαφορετικά σημεία P και S του $\overline{E}$ αντίστροφα ως προς τον $\mathcal{C}$. Αποδείξτε ότι κάθε γενικευμένος κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα P και S απεικονίζεται στον εαυτό του μέσω της αντιστροφής ως προς τον $\mathcal{C}$ και είναι ορθογώνιος προς τον $\mathcal{C}$.

Άσκηση 60. Έστω κύκλος $\mathcal{C}$ και σημείο P του $\overline{E}$. Αν ο γενικευμένος κύκλος $\mathcal{D}$ διέρχεται από το P και είναι ορθογώνιος προς τον $\mathcal{C}$, αποδείξτε ότι διέρχεται και από το αντίστροφο S του P ως προς τον $\mathcal{C}$.

Άσκηση 61. Θεωρήστε έναν κύκλο $\mathcal{C}$ και σημεία P και R του $\overline{E}$ τα οποία δεν είναι αντίστροφα ως προς τον $\mathcal{C}$. Κατασκευάστε γενικευμένο κύκλο ο οποίος διέρχεται από τα P και R και είναι ορθογώνιος προς τον $\mathcal{C}$. (Να διακρίνετε τις περιπτώσεις όπου κανένα ή ένα ή και τα δύο από τα P και R ανήκουν στον $\mathcal{C}$.)

Άσκηση 62. Θεωρήστε δύο κύκλους $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$ και σημείο P του $\overline{E}$. Κατασκευάστε γενικευμένο κύκλο $\mathcal{D}$ ο οποίος διέρχεται από το P και είναι ορθογώνιος προς τους $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$.

Άσκηση 63. Έστω κύκλος $\mathcal{C}$, δύο διαφορετικά σημεία A και B του E αντίστροφα ως προς τον $\mathcal{C}$ και τυχόν σημείο P του $\mathcal{C}$. Αποδείξτε ότι ο λόγος $\frac{PA}{PB}$ έχει σταθερή τιμή ανεξάρτητη από την θέση του P στον $\mathcal{C}$.

Άσκηση 64. Έστω δύο σημεία A και B και θετικός αριθμός $\lambda \neq 1$. Θεωρούμε τα δύο σημεία K και L της ευθείας AB με την ιδιότητα $\frac{KA}{KB} = \frac{LA}{LB} = \lambda$ και τον κύκλο $\mathcal{C}$ με διάμετρο KL. Αποδείξτε ότι τα A και B είναι αντίστροφα ως προς τον $\mathcal{C}$ και ότι ο $\mathcal{C}$ είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P με την ιδιότητα $\frac{PA}{PB} = \lambda$.

Άσκηση 65. Θεωρήστε έναν κύκλο $\mathcal{C}$ κέντρου O και δύο σημεία A και B εσωτερικά του $\mathcal{C}$ ώστε το O να μην ισαπέχει από τα A και B.
1. Πάρτε οποιονδήποτε κύκλο $\mathcal{D}$ ο οποίος διέρχεται από τα A και B και τέμνει τον $\mathcal{C}$ σε δύο σημεία M και N. Αποδείξτε ότι οι ευθείες AB και MN τέμνονται και θεωρήστε το σημείο τομής τους P.

2. Αποδείξτε ότι το σημείο P δεν εξαρτάται από τον κύκλο $\mathcal{D}$ (δηλαδή, ότι αν πάρουμε οποιονδήποτε άλλον κύκλο $\mathcal{D}'$ ο οποίος διέρχεται από τα A και B και τέμνει τον $\mathcal{C}$ στα M' και N', η ευθεία $M'N'$ διέρχεται από το P).
3. Θεωρήστε τις δύο εφαπτόμενες PR_1 και PR_2 στον κύκλο $\mathcal{C}$. Αποδείξτε ότι οι κύκλοι $\mathcal{D}_1$ και $\mathcal{D}_2$ οι οποίοι διέρχονται από τα A, B, R_1 και A, B, R_2, αντιστοίχως, εφάπτονται στον $\mathcal{C}$.
4. Θεωρήστε και τα αντίστροφα A' και B' των A και B ως προς τον $\mathcal{C}$ και τυχόντα κύκλο $\mathcal{D}'$ ο οποίος διέρχεται από τα A και B και τέμνει τον $\mathcal{C}$ στα M' και N'. Αποδείξτε ότι η ευθεία $M'N'$ διέρχεται από το σημείο P.
5. Αποδείξτε ότι οι κύκλοι $\mathcal{D}_1'$ και $\mathcal{D}_2'$ οι οποίοι διέρχονται από τα A', B', R_1 και A', B', R_2, αντιστοίχως, εφάπτονται στον $\mathcal{C}$.

Άσκηση 66. Πώς αλλάζουν τα αποτελέσματα της άσκησης 65 αν το O ισαπέχει από τα A και B;

Άσκηση 67. Θεωρήστε έναν κύκλο $\mathcal{C}$ κέντρου O και σημεία A και B του $\overline{E}$ και τα δύο εσωτερικά του $\mathcal{C}$ ή και τα δύο εξωτερικά του $\mathcal{C}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο γενικευμένοι κύκλοι διερχόμενοι από τα A και B και εφαπτόμενοι του $\mathcal{C}$ και κατασκευάστε τους.

ΔΕΥΤΕΡΑ, 22-1-07, 11-13.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ FEUERBACH.

Χρησιμοποιώντας γνωστά μας πράγματα σχετικά με την αντιστροφή ως προς κύκλο, αποδείξαμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα του Feuerbach. Ο κύκλος των εννέα σημείων κάθε τριγώνου εφάπτεται του εγγεγραμμένου και των τριών παρεγγεγραμμένων κύκλων του.