Αφροδίτη Γκικοπούλου

Πεπερασμένη παρεμβολή Pick στον μοναδιαίο δίσκο

Διπλωματική Εργασία

Επιβλέπων Καθηγητής: Μιχάλης Παπαδημητράκης

Εαρινό Εξάμηνο 2017-2018

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητή Μιχάλη Παπαδημητράκη, για την ουσιαστική υποστήριξη της προσπάθειας μου, και την πολύτιμη καθοδήγηση του. Η υπομονή, οι επιστημονικές γνώσεις και η εμπειρία του συνέβαλαν καθοριστικά στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

Θερμές ευχαριστίες επίσης οφείλω στους καθηγητές, Γεώργιο Κωστάκη και Θεμιστοκλή Μήτση, για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή αξιολόγησης της πτυχιακής εργασίας μου.

Πεπερασμένα γινόμενα Blaschke

Θεώρημα 1. *Ένα πεπερασμένο γινόμενο Blaschke είναι συνάρτηση της μορφής*

$$B(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z},$$

όπου $|\lambda| = 1$ *και* $|z_j| < 1$ *για* $j = 1, \ldots, n$.
Η συνάρτηση B *έχει τις ιδιότητες:*
(i) η B *είναι αναλυτική σε δίσκο μεγαλύτερο από τον* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$,
(ii) $|B| = 1$ *στο* $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$,
(iii) η B *έχει μοναδικές ρίζες* $z_1, \ldots, z_n$.

Απόδειξη. Έστω $\phi(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$, όπου $a = z_j$ και άρα $|a| < 1$.
Η ϕ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\}$ και $\phi(a) = 0$. Επίσης, έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες σχέσεις:

$$|\phi(z)| < 1.$$

$$\left|\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}\right|^2 < 1.$$

$$|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}z) + |a|^2 < 1 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}z) + |a|^2|z|^2.$$

$$(|z|^2 - 1)(1 - |a|^2) < 0.$$

$$|z| < 1.$$

Άρα $|\phi(z)| < 1$ αν και μόνο αν $|z| < 1$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $|\phi(z)| = 1$ αν και μόνο αν $|z| = 1$, καθώς και $|\phi(z)| > 1$ αν και μόνο αν $|z| > 1$. Άρα $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ και $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$.
Επομένως για την $B(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n} \frac{z-z_j}{1-\overline{z_j}z}$ ισχύει

$$|B(z)| = \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j}z}\right| < 1 \qquad \text{για } |z| < 1$$

και

$$|B(z)| = \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j}z}\right| = 1 \qquad \text{για } |z| = 1.$$

Δηλαδή $B : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ και $B : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$. Η B είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{1/\overline{z_1}, \ldots, 1/\overline{z_n}\}$ το οποίο περιέχει έναν δίσκο $D(0, R)$ μεγαλύτερο του $\mathbb{D}$. Αρκεί να πάρουμε ως R το μικρότερο από τα $|1/\overline{z_j}|$ για $1 \leq j \leq n$. Από τον τύπο της συνάρτησης B φαίνεται ότι οι $z_1, \ldots, z_n$ είναι οι μοναδικές ρίζες της. □

Το θεώρημα 1 ισχύει και αντιστρόφως.

Θεώρημα 2. *Έστω ότι μια συνάρτηση* B *έχει τις ιδιότητες (i), (ii), (iii) του θεωρήματος 1. Τότε η* B *είναι γινόμενο Blaschke, δηλαδή είναι της μορφής*

$$B(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j}z}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$B^*(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j}z}.$$

Έστω

$$h(z) = B(z)(1 - \overline{z_1}z) \cdots (1 - \overline{z_n}z).$$

Η h είναι αναλυτική στο σύνολο A στο οποίο είναι αναλυτική η B, το οποίο είναι μεγαλύτερο από τον $\mathbb{D}$.
Η h είναι αναλυτική στο z_1 και $h(z_1) = 0$, οπότε η $h(z)$ για z κοντά στο z_1 γράφεται

$$h(z) = a_1(z - z_1) + a_2(z - z_1)^2 + a_3(z - z_1)^3 \cdots, \tag{1}$$

όπου η δυναμοσειρά στην δεξιά πλευρά είναι η σειρά Taylor της h στο z_1. Ειδικότερα: $a_1 = h'(z_1)$.
Τώρα ορίζουμε

$$g(z) = \begin{cases} \frac{h(z)}{z}, & z \in A, z \neq z_1 \\ a_1 = h'(z_1), & z = z_1 \end{cases}$$

Η g είναι αναλυτική στο $A \backslash \{z_1\}$. Επίσης είναι αναλυτική και στο z_1, αφού από την (1) συνεπάγεται ότι

$$g(z) = a_1 + a_2(z - z_1) + a_3(z - z_1)^2 \cdots$$

για z κοντά στο z_1. Επομένως υπάρχει g αναλυτική στο σύνολο A ώστε

$$h(z) = (z - z_1)g(z)$$

για $z \in A$. Τώρα η g είναι αναλυτική στο z_2 και $g(z_2) = 0$. Άρα πάλι από τη σειρά Taylor της g στο z_2 προκύπτει ότι υπάρχει p αναλυτική στο σύνολο A ώστε $g(z) = (z - z_2)p(z)$ και άρα

$$h(z) = (z - z_1)(z - z_2)p(z)$$

για $z \in A$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, καταλήγουμε στο ότι υπάρχει f αναλυτική στο A ώστε

$$B(z)(1 - \overline{z_1}z) \cdots (1 - \overline{z_n}z) = h(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)f(z)$$

και άρα

$$f(z) = \frac{B(z)(1 - \overline{z_1}z) \cdots (1 - \overline{z_n}z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_n)} = \frac{B(z)}{B^*(z)}$$

για $z \in A \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$. Άρα
(i) η f είναι αναλυτική σε δίσκο μεγαλύτερο από τον $\mathbb{D}$,
(ii) η f δεν μηδενίζεται στα $z_1, \ldots, z_n$ και άρα δεν μηδενίζεται πουθενά στο $\mathbb{D}$,
(iii) $|f(z)| = \frac{|B(z)|}{|B^*(z)|} = 1$ για $z \in \mathbb{T}$.
Από τα (i), (ii) και την Αρχή Μεγίστου έπεται ότι

$$|f(z)| \leq 1 \tag{2}$$

για $z \in \mathbb{D}$. Επίσης η $\frac{1}{f(z)}$ είναι αναλυτική σε δίσκο μεγαλύτερο από τον $\mathbb{D}$, οπότε και πάλι από την Αρχή Μεγίστου έπεται ότι

$$\frac{1}{|f(z)|} \leq 1 \tag{3}$$

για $z \in \mathbb{D}$. Από τις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι $|f(z)| = 1$ για $z \in \mathbb{D}$. Δηλαδή η f είναι σταθερή στο $\mathbb{D}$: $f(z) = \lambda$ για $z \in \mathbb{D}$ με $|\lambda| = 1$. Άρα

$$B(z) = \lambda B^*(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j}z}$$

για $z \in \mathbb{D}$. Δηλαδή η συνάρτηση B είναι γινόμενο Blaschke. □

Πρόταση 1. *Έστω $C(z) = B(\frac{z-a}{1-\bar{a}z})$ με $a \in \mathbb{D}$. Τότε η συνάρτηση C είναι γινόμενο Blaschke αν και μόνο αν η συνάρτηση B είναι γινόμενο Blaschke.*

Απόδειξη. Έστω ότι η B είναι γινόμενο Blaschke, δηλαδή

$$B(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z}$$

με $|\lambda| = 1$ και $z_j \in \mathbb{D}$. Για κάθε j έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\frac{z-a}{1-\overline{a}z} - z_j}{1 - \overline{z_j}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}} &= \frac{z - a - z_j + \overline{a}z_j z}{1 - \overline{a}z - \overline{z_j}z + a\overline{z_j}} = \frac{(1+\overline{a}z_j)z - (a+z_j)}{(1+a\overline{z_j}) - \overline{(a+z_j)}z} = \frac{1+\overline{a}z_j}{1+a\overline{z_j}} \frac{z - \frac{a+z_j}{1+\overline{a}z_j}}{1 - \overline{(\frac{a+z_j}{1+\overline{a}z_j})}\, z}\\ &= \kappa_j \frac{z - z_j'}{1 - \overline{z_j'}z},\end{aligned}$$

όπου $\kappa_j = \frac{1+\overline{a}z_j}{1+a\overline{z_j}}$ και $z_j' = \frac{z_j+a}{1+\overline{a}z_j}$. Έχουμε ότι $|\kappa_j| = 1$ και $z_j' \in \mathbb{D}$. Άρα

$$C(z) = B\Big(\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\Big) = \lambda\kappa \prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j'}{1 - \overline{z_j'}z},$$

όπου $\kappa = \kappa_1 \cdots \kappa_n$ και άρα $|\lambda\kappa| = 1$. Δηλαδή η C είναι γινόμενο Blaschke.
Τώρα έστω ότι η C είναι γινόμενο Blaschke. Θέτουμε $w = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ και άρα $z = \frac{w+a}{1+\overline{a}w}$. Συνεπάγεται

$$B(w) = C\Big(\frac{w+a}{1+\overline{a}w}\Big),$$

οπότε από τα προηγούμενα, με $-a$ στη θέση του a, έχουμε ότι η B είναι γινόμενο Blaschke. □

Πρόταση 2. *Έστω $C(z) = \frac{B(z)-a}{1-\overline{a}B(z)}$ με $a \in \mathbb{D}$. Τότε η συνάρτηση C είναι γινόμενο Blaschke αν και μόνο αν η συνάρτηση B είναι γινόμενο Blaschke.*

Απόδειξη. Έστω ότι η B είναι γινόμενο Blaschke. Τότε η B είναι αναλυτική σε δίσκο μεγαλύτερο του $\mathbb{D}$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $r > 1$ ώστε να ισχύει $B(z) \neq \frac{1}{\overline{a}}$ για $|z| < r$. Αν αυτό δεν ίσχυε, τότε για κάθε $r > 1$ θα υπήρχε z με $|z| < r$ και $B(z) = \frac{1}{\overline{a}}$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα υπήρχε z_n με $|z_n| < 1 + \frac{1}{n}$ και $B(z_n) = \frac{1}{\overline{a}}$. Τότε $|z_n| \leq 2$ οπότε υπάρχει υπακολουθία (z_{n_k}) η οποία τείνει σε κάποιο z. Από $|z_{n_k}| < 1 + \frac{1}{n_k}$ έχουμε $|z| \leq 1$ και, επειδή $B(z_{n_k}) = \frac{1}{\overline{a}}$, έχουμε $B(z) = \frac{1}{\overline{a}}$. Αυτό είναι άτοπο, διότι αν $|z| \leq 1$ τότε $|B(z)| \leq 1$. Άρα ο ισχυρισμός ισχύει, οπότε για κάποιο $r > 1$,! η $C(z) = \frac{B(z)-a}{1-\overline{a}B(z)}$ είναι αναλυτική στον δίσκο $\mathbb{D}(0; r)$.
Επίσης ισχύει ότι, αν $|z| = 1$, τότε $|B(z)| = 1$ και άρα $|C(z)| = 1$.
Επιπλέον, $C(z) = 0$ αν και μόνο αν $B(z) = a$. Αν η $B(z) = a$ είχε άπειρες λύσεις στον $\mathbb{D}$, τότε η B θα ήταν σταθερή στον $\mathbb{D}$ και ίση με a. Αυτό δεν ισχύει, οπότε η $C(z) = 0$ έχει πεπερασμένες ρίζες στο $\mathbb{D}$.
Επομένως η C έχει τις ιδιότητες (i), (ii), (iii) που αναφέρονται στο θεώρημα 1. Άρα από το θεώρημα 2 η συνάρτηση C είναι γινόμενο Blaschke.
Τώρα έστω ότι η C είναι γινόμενο Blaschke. Επειδή

$$B(z) = \frac{C(z)+a}{1+\overline{a}C(z)},$$

από τα προηγούμενα, με $-a$ στη θέση του a, έχουμε ότι η B είναι γινόμενο Blaschke. □

Ένα γινόμενο Blaschke της μορφής

$$B(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j} z}$$

λέμε ότι είναι βαθμού n. Επίσης μία σταθερή συνάρτηση

$$B(z) = \lambda,$$

με $|\lambda| = 1$, λέμε ότι είναι γινόμενο Blaschke βαθμού 0. Ένα τέτοιο γινόμενο Blaschke δεν έχει ρίζες.

Πρόταση 3. *Έστω $C(z) = B(\frac{z-a}{1-\overline{a}z})$ με $a \in \mathbb{D}$. Η C είναι γινόμενο Blaschke βαθμού n αν και μόνο αν η B είναι γινόμενο Blaschke βαθμού n.*

Απόδειξη. Αυτό είναι φανερό από την απόδειξη της πρότασης 1. □

Πρόταση 4. *Έστω γινόμενο Blaschke B βαθμού n. Τότε*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{T}} \frac{B'(z)}{B(z)}\,dz = n.$$

Απόδειξη. Έστω $B(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n} \frac{z-z_j}{1-\overline{z_j}z}$. Από το θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων ισχύει

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{T}} \frac{B'(z)}{B(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{n} \text{Res}\left(\frac{B'}{B}; z_j\right).$$

Έστω ότι κάποια ρίζα z_0 από τις $z_1, \ldots, z_n$ επαναλαμβάνεται $k \geq 1$ φορές. Τότε ο αντίστοιχος όρος $\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$ υπάρχει k φορές στο γινόμενο. Δηλαδή

$$B(z) = \left(\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right)^k g(z)$$

με $g(z_0) \neq 0$. Τότε

$$B'(z) = k\left(\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right)^{k-1} \frac{1-|z_0|^2}{(1-\overline{z_0}z)^2}\, g(z) + \left(\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right)^k g'(z),$$

οπότε

$$\frac{B'(z)}{B(z)} = k\,\frac{1-|z_0|^2}{(z-z_0)(1-\overline{z_0}z)} + \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{\phi(z)}{z-z_0},$$

όπου η $\phi(z) = k\frac{1-|z_0|^2}{1-\overline{z_0}z} + \frac{g'(z)}{g(z)}(z-z_0)$ είναι αναλυτική στο z_0 με $\phi(z_0) = k \neq 0$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\text{Res}\left(\frac{B'}{B}; z_0\right) = k.$$

Επομένως το $\sum_{j=1}^{n} \text{Res}\left(\frac{B'}{B}; z_j\right)$ ισούται με το άθροισμα των πολλαπλοτήτων των ριζών και άρα ισούται με n. □

Πρόταση 5. *Έστω $C(z) = \frac{B(z)-a}{1-\overline{a}B(z)}$ με $a \in \mathbb{D}$. Η C είναι γινόμενο Blaschke βαθμού n αν και μόνο αν η B είναι γινόμενο Blaschke βαθμού n.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 2 έχουμε ότι η C είναι γινόμενο Blaschke αν και μόνο αν η B είναι γινόμενο Blaschke. Έστω n ο βαθμός της B και m ο βαθμός της C.
Θέτουμε $w = B(z)$ και $dw = B'(z)\,dz$ και έχουμε ότι

$$n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{T}} \frac{B'(z)}{B(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_B} \frac{1}{w}\,dw$$

είναι ο αριθμός περιστροφών της γ γύρω από το 0, όπου γ_B είναι η καμπύλη με τροχιά πάνω στον $\mathbb{T}$ την οποία διαγράφει το $w = B(z)$ όταν το z περιστρέφεται μία φορά στον κύκλο $\mathbb{T}$.
Επίσης θέτουμε $\zeta = C(z)$ και $d\zeta = C'(z)\, dz$ και παίρνουμε ότι

$$m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{T}} \frac{C'(z)}{C(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_C} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta$$

είναι ο αριθμός περιστροφών της γ' γύρω από το 0, όπου γ_C είναι η καμπύλη με τροχιά πάνω στον $\mathbb{T}$ την οποία διαγράφει το $\zeta = C(z)$ όταν το z περιστρέφεται μία φορά στον κύκλο $\mathbb{T}$.
Έχουμε

$$\zeta = C(z) = \frac{B(z) - a}{1 - \overline{a}B(z)} = \frac{w - a}{1 - \overline{a}w}.$$

Αν το w γυρίσει μία φορά στον $\mathbb{T}$, τότε το ζ θα γυρίσει μία φόρα στον $\mathbb{T}$, οπότε, αν το w γυρίσει n φορές στον $\mathbb{T}$, τότε το ζ θα γυρίσει n φορές στον $\mathbb{T}$. Άρα $m = n$. □

Το Λήμμα του Schwarz.

Λήμμα του Schwarz. *Έστω $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ αναλυτική στον $\mathbb{D}$ και $f(0) = 0$. Τότε*
(i) $|f(z)| \leq |z|$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$,
(ii) $|f'(0)| \leq 1$.
Αν ισχύει ισότητα είτε στο (i) για ένα τουλάχιστον $z \in \mathbb{D}$, $z \neq 0$ είτε στο (ii), τότε ισχύει $f(z) = \lambda z$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$ και σταθερό λ με $|\lambda| = 1$.

Απόδειξη. Επειδή $f(0) = 0$, με το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του θεωρήματος 2 συνεπάγεται ότι υπάρχει αναλυτική συνάρτηση g στον $\mathbb{D}$ ώστε

$$f(z) = zg(z)$$

για $z \in \mathbb{D}$. Επομένως

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \in \mathbb{D}, z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Έστω $z \in \mathbb{D}$. Θεωρούμε r ώστε $|z| < r < 1$. Τότε από την Αρχή Μεγίστου για την g στον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0; r)$ έχουμε

$$|g(z)| \leq \max_{|w| \leq r} |g(w)| = \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{|w|} = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

Παίρνοντας όριο όταν $r \to 1^-$, έχουμε ότι $|g(z)| \leq 1$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$. Από την (4) καταλήγουμε στα (i) και (ii).
Έστω ότι ισχύει η ισότητα είτε στο (i) για ένα τουλάχιστον $z \in \mathbb{D}$, $z \neq 0$ είτε στο (ii). Τότε από την (4) έχουμε ότι ισχύει $|g(z)| = 1$ για ένα τουλάχιστον $z \in \mathbb{D}$. Αφού $|g(z)| \leq 1$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$, από την Αρχή Μεγίστου συνεπάγεται ότι η g είναι σταθερή στο $\mathbb{D}$. Δηλαδή $g(z) = \lambda$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$, όπου $|\lambda| = 1$. Άρα $f(z) = \lambda z$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$. □

Πρόταση 6. *Έστω $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ αναλυτική στον $\mathbb{D}$. Τότε*
(i) $\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_2)}f(z_1)}\right| \leq \left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_2}z_1}\right|$ για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$,
(ii) $|f'(z)| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$.
Αν ισχύει ισότητα είτε στο (i) για ένα τουλάχιστον ζευγάρι $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ με $z_1 \neq z_2$ είτε στο (ii) για ένα τουλάχιστον $z \in \mathbb{D}$, τότε υπάρχει $a \in \mathbb{D}$ και λ με $|\lambda| = 1$ ώστε να είναι $f(z) = \lambda\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$.

Απόδειξη. (i) Έστω $z_2 \in \mathbb{D}$. Θέτουμε $u = \frac{z-z_2}{1-\overline{z_2}z}$. Τότε το u διατρέχει το $\mathbb{D}$ όταν το z διατρέχει το $\mathbb{D}$ και αντιστρόφως. Επίσης θέτουμε $\zeta = \frac{w-f(z_2)}{1-\overline{f(z_2)}w}$. Τότε το ζ διατρέχει το $\mathbb{D}$ όταν το w διατρέχει το $\mathbb{D}$ και αντιστρόφως. Από $u = \frac{z-z_2}{1-\overline{z_2}z}$ συνεπάγεται $z = \frac{u+z_2}{1+\overline{z_2}u}$ και άρα με $w = f(z)$ έχουμε

$$\zeta = \frac{w - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)}w} = \frac{f(z) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)}f(z)} = \frac{f(\frac{u+z_2}{1+\overline{z_2}u}) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)}f(\frac{u+z_2}{1+\overline{z_2}u})}.$$

Επομένως η ζ είναι συνάρτηση του u, δηλαδή $\zeta = F(u)$, όπου η $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ είναι αναλυτική στον $\mathbb{D}$ και $F(0) = 0$. Άρα από το Λήμμα του Schwarz έχουμε $|F(u)| \leq |u|$ ή, ισοδύναμα,

$$\Big|\frac{f(\frac{u+z_2}{1+\overline{z_2}u}) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)}f(\frac{u+z_2}{1+\overline{z_2}u})}\Big| \leq |u| \tag{5}$$

για κάθε $u \in \mathbb{D}$. Τώρα, για κάθε $z_1 \in \mathbb{D}$ υπάρχει μοναδικό $u \in \mathbb{D}$ ώστε $z_1 = \frac{u+z_2}{1+\overline{z_2}u}$. Άρα

$$\Big|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)}f(z_1)}\Big| \leq |u| = \Big|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2}z_1}\Big|.$$

Αν ισχύει η ισότητα για καποίο $z_1 \in \mathbb{D}$, $z_1 \neq z_2$ τότε ισχύει ισότητα για το αντίστοιχο $u \neq 0$ στην (5) και τότε υπάρχει μ με $|\mu| = 1$ ώστε να ισχύει $F(u) = \mu u$ για κάθε $u \in \mathbb{D}$. Δηλαδή

$$\frac{f(\frac{u+z_2}{1+\overline{z_2}u}) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)}f(\frac{u+z_2}{1+\overline{z_2}u})} = \mu u$$

για κάθε $u \in \mathbb{D}$. Επειδή $u = \frac{z-z_2}{1-\overline{z_2}z}$, έχουμε

$$\frac{f(z) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)}f(z)} = \mu\frac{z - z_2}{1 - \overline{z_2}z}$$

για κάθε $z \in \mathbb{D}$. Κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στο ότι ισχύει

$$f(z) = \lambda\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}$$

για κάθε $z \in \mathbb{D}$, όπου $\lambda = \frac{\mu - f(z_2)\overline{z_2}}{1-\overline{f(z_2)}z_2\mu}$, και άρα $|\lambda| = 1$, και όπου $a = -\frac{\overline{\mu}f(z_2)-z_2}{1-\overline{z_2}\,\overline{\mu}f(z_2)}$, και άρα $a \in \mathbb{D}$.
(ii) Πάλι από το Λήμμα του Schwarz ισχύει $|F'(0)| \leq 1$. Βρίσκουμε $F'(0) = \frac{f'(z_2)(1-|z_2|^2)}{1-|f(z_2)|^2}$ μετά από λίγες πράξεις και επομένως,

$$|f'(z_2)| \leq \frac{1 - |f(z_2)|^2}{1 - |z_2|^2}.$$

Αν ισχύει ισότητα για κάποιο z_2, τότε $|F'(0)| = 1$. Άρα υπάρχει μ με $|\mu| = 1$ ώστε να ισχύει $F(u) = \mu u$ για κάθε $u \in \mathbb{D}$ και όπως στο (i) καταλήγουμε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{D}$ και λ με $|\lambda| = 1$ ώστε να είναι $f(z) = \lambda\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$. □

Θετικές τετραγωνικές μορφές.

Η τετραγωνική μορφή

$$Q(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}t_j\overline{t_k}$$

ονομάζεται μη-αρνητική αν $Q_n(t_1, \ldots, t_n) \geq 0$ για κάθε $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{C}$. Το ότι η Q είναι μη-αρνητική το συμβολίζουμε με $Q \geq 0$.

Παράδειγμα 1. Για $n = 1$ έχουμε $Q(t_1) = a_{11}t_1\overline{t_1} = a_{11}|t_1|^2$.
Άρα $Q \geq 0$ αν και μόνο αν $a_{11} \geq 0$.

Παράδειγμα 2. Για $n = 2$ έχουμε

$$Q(t_1, t_2) = a_{11}|t_1|^2 + a_{12}t_1\overline{t_2} + a_{21}t_2\overline{t_1} + a_{22}|t_2|^2.$$

Θα δούμε ότι $Q \geq 0$ αν και μόνο αν:

$$a_{11} \geq 0, \quad a_{22} \geq 0, \quad \overline{a_{12}} = a_{21}, \quad a_{11}a_{22} \geq |a_{12}|^2.$$

Έστω $Q(t_1, t_2) \geq 0$ για κάθε $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$.
Με $t_2 = 0$ έχουμε $a_{11}|t_1|^2 \geq 0$ για κάθε $t_1 \in \mathbb{C}$. Άρα $a_{11} \geq 0$.
Με $t_1 = 0$ έχουμε $a_{22}|t_2|^2 \geq 0$ για κάθε $t_2 \in \mathbb{C}$. Άρα $a_{22} \geq 0$.
Τώρα, αφού $Q(t_1, t_2) \in \mathbb{R}$ και $a_{11}|t_1|^2 \in \mathbb{R}$ και $a_{22}|t_2|^2 \in \mathbb{R}$, συνεπάγεται $a_{12}t_1\overline{t_2} + a_{21}t_2\overline{t_1} \in \mathbb{R}$ ή, ισοδύναμα,

$$a_{12}t_1\overline{t_2} + a_{21}t_2\overline{t_1} = \overline{a_{12}}\,\overline{t_1}t_2 + \overline{a_{21}}\,\overline{t_2}t_1$$

για κάθε $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$. Θέτουμε $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ και βρίσκουμε $a_{12} + a_{21} = \overline{a_{12}} + \overline{a_{21}}$. Κατόπιν θέτουμε $t_1 = 1$, $t_2 = i$ και βρίσκουμε $-a_{12} + a_{21} = \overline{a_{12}} - \overline{a_{21}}$. Προσθέτουμε τις δύο ισότητες και παίρνουμε $\overline{a_{12}} = a_{21}$.
Μέχρι τώρα έχουμε δείξει ότι $a_{11} \geq 0$, $a_{22} \geq 0$ και $\overline{a_{12}} = a_{21}$. Βάσει της τελευταίας ισότητας, η $Q(t_1, t_2) \geq 0$ γράφεται

$$a_{11}|t_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(a_{12}t_1\overline{t_2}) + a_{22}|t_2|^2 \geq 0. \tag{6}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
(i) Αν $a_{11} = 0$, τότε στην (6) θέτουμε $t_1 = \overline{a_{12}}x$ με $x \in \mathbb{R}$ και $t_2 = 2$ και παίρνουμε ότι $|a_{12}|^2x + a_{22} \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπάγεται $a_{12} = 0$ και άρα $a_{11}a_{22} \geq |a_{12}|^2$.
(ii) Αν $a_{11} > 0$, τότε η (6) γράφεται

$$\left|\sqrt{a_{11}}t_1 + \frac{\overline{a_{12}}}{\sqrt{a_{11}}}t_2\right|^2 + \frac{a_{11}a_{22} - |a_{12}|^2}{a_{11}}|t_2|^2 \geq 0.$$

Θέτουμε $t_1 = -\frac{\overline{a_{12}}}{a_{11}}$ και $t_2 = 1$ και παίρνουμε πάλι $a_{11}a_{22} \geq |a_{12}|^2$.
Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι $a_{11} \geq 0$, $a_{22} \geq 0$, $\overline{a_{12}} = a_{21}$ και $a_{11}a_{22} \geq |a_{12}|^2$.
(i) Αν $a_{11} = 0$, τότε $a_{12} = a_{21} = 0$ και έχουμε ότι $Q(t_1, t_2) = a_{22}|t_2|^2 \geq 0$ για κάθε $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$.
(ii) Αν $a_{11} > 0$, τότε

$$Q(t_1, t_2) = \left|\sqrt{a_{11}}t_1 + \frac{\overline{a_{12}}}{\sqrt{a_{11}}}t_2\right|^2 + \frac{a_{11}a_{22} - |a_{12}|^2}{a_{11}}|t_2|^2 \geq 0$$

για κάθε $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$.

Το Θεώρημα του Pick.

Θα γράφουμε $f \in \mathcal{B}$ όταν η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{D}$ και ισχύει $|f(z)| \leq 1$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$.

Παράδειγμα 3. Προφανώς, κάθε γινόμενο Blaschke ανήκει στην συλλογή $\mathcal{B}$.

Για ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο από διακριτά σημεία $z_1, \ldots, z_n$ στον $\mathbb{D}$, το θεώρημα του Pick προσδιορίζει τα σημεία $w_1, \ldots, w_n$ για τα οποία η παρεμβολή

$$f(z_1) = w_1, \ldots, f(z_n) = w_n \tag{7}$$

έχει λύση $f \in \mathcal{B}$.

Θεώρημα του Pick. *Υπάρχει $f \in \mathcal{B}$ που ικανοποιεί την παρεμβολή (7) αν και μόνο αν η τετραγωνική μορφή*

$$Q(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{1 - w_j \overline{w_k}}{1 - z_j \overline{z_k}}\, t_j \overline{t_k}$$

είναι μη αρνητική. Αν $Q \geq 0$, τότε υπάρχει γινόμενο Blaschke βαθμού το πολύ n το οποίο ικανοποιεί την (7).

Απόδειξη. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση $n = 1$ και έστω δοσμένο $z_1 \in \mathbb{D}$ και w_1.
Τότε για την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή ισχύει

$$Q_1(t_1) = \frac{1 - |w_1|^2}{1 - |z_1|^2} |t_1|^2 \geq 0$$

για κάθε $t_1 \in \mathbb{C}$ αν και μόνο αν $|w_1| \leq 1$. Δηλαδή η Q_1 είναι μη-αρνητική αν και μόνο αν $|w_1| \leq 1$. Θα δούμε τώρα ότι η ίδια συνθήκη $|w_1| \leq 1$ είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη $f \in \mathcal{B}$ με $f(z_1) = w_1$.
Αν $f \in \mathcal{B}$ και $f(z_1) = w_1$, τότε είναι προφανές ότι $|w_1| = |f(z_1)| \leq 1$. Αντιστρόφως, έστω $|w_1| \leq 1$. Θα δούμε ότι υπάρχει γινόμενο Blaschke B βαθμού το πολύ 1 με $B(z_1) = w_1$.
Αν $|w_1| = 1$, θεωρούμε το σταθερό γινόμενο Blaschke $B(z) = w_1$. Το B δεν έχει ρίζες, οπότε είναι γινόμενο Blaschke βαθμού 0, και ισχύει $B(z_1) = w_1$.
Αν $|w_1| < 1$, δηλαδή $w_1 \in \mathbb{D}$, θα δούμε ότι με κατάλληλο $z_0 \in \mathbb{D}$ το γινόμενο Blaschke βαθμού 1 με τύπο

$$f(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$$

ικανοποιεί την $f(z_1) = w_1$. Βρίσκουμε το z_0 από την $\frac{z_1 - z_0}{1 - \overline{z_0} z_1} = w_1$ ή, ισοδύναμα,

$$z_1 - z_0 = w_1 - \overline{z_0} z_1 w_1. \tag{8}$$

Παίρνοντας την συζυγή της (8), έχουμε $\overline{z_1} - \overline{z_0} = \overline{w_1} - z_0 \overline{z_1}\, \overline{w_1}$ ή, ισοδύναμα,

$$\overline{z_0} = \overline{z_1} - \overline{w_1} + z_0 \overline{z_1}\, \overline{w_1}.$$

Αντικαθιστώντας στην (8) το $\overline{z_0}$ από την τελευταία σχέση και κάνοντας πράξεις βρίσκουμε

$$z_0 = \frac{z_1(1 - |w_1|^2) - w_1(1 - |z_1|^2)}{1 - |z_1|^2 |w_1|^2}.$$

Απομένει να ελέγξουμε ότι $|z_0| < 1$. Μετά από πράξεις αυτό είναι ισοδύναμο με $|1 + z_1 \overline{w_1}|^2 > 0$.
Αυτό ισχύει διότι $z_1 \overline{w_1} \neq -1$, αφού $|z_1 \overline{w_1}| = |z_1||w_1| < 1$.
Θεωρούμε τώρα $n > 1$.
(a) Εξετάζουμε κατ' αρχάς την περίπτωση $|w_n| = 1$.
Έστω ότι υπάρχει $f \in \mathcal{B}$ η οποία λύνει την (7). Τότε $|f(z_n)| = |w_n| = 1$ και ισχύει $|f(z)| \leq 1$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$. Από την Αρχή Μεγίστου η f είναι σταθερή στο $\mathbb{D}$. Επομένως $w_j = f(z_j) = w_n$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$. Τότε για την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή Q_n ισχύει

$$Q_n(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{1 - w_j \overline{w_k}}{1 - z_j \overline{z_k}} t_j \overline{t_k} = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{1 - |w_n|^2}{1 - z_j \overline{z_k}} t_j \overline{t_k} = 0$$

για κάθε $t_1, \ldots, t_n$ και άρα $Q_n \geq 0$.
Έστω τώρα $Q_n \geq 0$. Θεωρούμε οποιοδήποτε $k = 1, \ldots, n-1$ και παίρνουμε $t_j = 0$ για $j \neq k, n$.
Τότε ισχύει

$$Q_n(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1 - |w_k|^2}{1 - |z_k|^2} |t_k|^2 + \frac{1 - w_k \overline{w_n}}{1 - z_k \overline{z_n}} t_k \overline{t_n} + \frac{1 - w_n \overline{w_k}}{1 - z_n \overline{z_k}} t_n \overline{t_k} \geq 0$$

για κάθε t_k, t_n. Βάσει του παραδείγματος 2, με $a_{22} = 0$, συνεπάγεται $\frac{1-w_k\overline{w_n}}{1-z_k\overline{z_n}} = 0$ και άρα $w_k = \frac{1}{\overline{w_n}} = w_n$. Άρα όλα τα w_k είναι ίσα με το w_n και μπορούμε να επιλέξουμε το σταθερό γινόμενο Blaschke $B(z) = w_n$ το οποίο είναι βαθμού 0 και λύνει την παρεμβολή (7).
Συνεπώς, το θεώρημα ισχύει στην περίπτωση $|w_n| = 1$.
(b) Τώρα παίρνουμε την περίπτωση $|w_n| < 1$ και υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για το $n-1$. Θέτουμε

$$z'_j = \frac{z_j - z_n}{1 - \overline{z_n}z_j}, \qquad w'_j = \frac{w_j - w_n}{1 - \overline{w_n}w_j}$$

για $1 \leq j \leq n$. Τότε ισχύει και

$$z_j = \frac{z'_j + z_n}{1 + \overline{z_n}z'_j}, \qquad w_j = \frac{w'_j + w_n}{1 + \overline{w_n}w'_j}$$

για $1 \leq j \leq n$.
Ειδικά: $z'_n = 0$ και $w'_n = 0$.
Έστω ότι υπάρχει $f \in \mathcal{B}$ η οποία ικανοποιεί την (7). Θεωρούμε την συνάρτηση g με τύπο

$$g(z) = \frac{f(\frac{z+z_n}{1+\overline{z_n}z}) - w_n}{1 - \overline{w_n}f(\frac{z+z_n}{1+\overline{z_n}z})}. \tag{9}$$

Τότε $g \in \mathcal{B}$ και

$$g(z'_j) = \frac{f(\frac{z'_j+z_n}{1+\overline{z_n}z'_j}) - w_n}{1 - \overline{w_n}f(\frac{z'_j+z_n}{1+\overline{z_n}z'_j})} = \frac{f(z_j) - w_n}{1 - \overline{w_n}f(z_j)} = \frac{w_j - w_n}{1 - \overline{w_n}w_j} = w'_j$$

για $1 \leq j \leq n$. Άρα υπάρχει $g \in \mathcal{B}$ η οποία λύνει την παρεμβολή

$$g(z'_1) = w'_1, \ldots, g(z'_n) = w'_n. \tag{10}$$

Το αντίστροφο ισχύει επίσης. Έστω ότι η $g \in \mathcal{B}$ ικανοποιεί την (10). Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο

$$f(z) = \frac{g(\frac{z-z_n}{1-\overline{z_n}z}) + w_n}{1 + \overline{w_n}g(\frac{z-z_n}{1-\overline{z_n}z})}, \tag{11}$$

ο οποίος είναι αντίστροφος του τύπου (9). Τότε $f \in \mathcal{B}$ και

$$f(z_j) = \frac{g(\frac{z_j-z_n}{1-\overline{z_n}z_j}) + w_n}{1 + \overline{w_n}g(\frac{z_j-z_n}{1-\overline{z_n}z_j})} = \frac{g(z'_j) + w_n}{1 + \overline{w_n}g(z'_j)} = \frac{w'_j + w_n}{1 + \overline{w_n}w'_j} = w_j$$

για $1 \leq j \leq n$. Άρα υπάρχει $f \in \mathcal{B}$ η οποία λύνει την παρεμβολή (7).
Επίσης, ισχύει ότι η f είναι γινόμενο Blaschke βαθμού το πολύ n αν και μόνο αν η g είναι γινόμενο Blaschke βαθμού το πολύ n. Πράγματι, αν η f είναι γινόμενο Blaschke βαθμού το πολύ n, τότε από την πρόταση 3 συνεπάγεται ότι η $f(\frac{z+z_n}{1+\overline{z_n}z})$ είναι γινόμενο Blaschke βαθμού το πολύ n και τότε από την πρόταση 5 και τον τύπο (9) συνεπάγεται ότι η g είναι γινόμενο Blaschke βαθμού το πολύ n. Ομοίως, αν η g είναι γινόμενο Blaschke βαθμού το πολύ n, τότε από την πρόταση 3 συνεπάγεται ότι η $g(\frac{z-z_n}{1-\overline{z_n}z})$ είναι γινόμενο Blaschke βαθμού το πολύ n και τότε από την πρόταση 5 και τον! τύπο (11) συνεπάγεται ότι η f είναι γινόμενο Blaschke βαθμού το πολύ n.
Από την άλλη μεριά, έχουμε την τετραγωνική μορφή Q'_n η οποία αντιστοιχεί στα $z'_1, \ldots, z'_{n-1}, 0$ και $w'_1, \ldots, w'_{n-1}, 0$. Θα δούμε ότι η Q'_n σχετίζεται στενά με την Q_n.
Μετά από αρκετές πράξεις βρίσκουμε

$$\frac{1 - z'_j\overline{z'_k}}{1 - z_j\overline{z_k}} = \frac{1 - |z_n|^2}{(1 - \overline{z_n}z_j)(1 - z_n\overline{z_k})} = \alpha_j\overline{\alpha_k},$$

όπου $\alpha_j = \frac{(1-|z_n|^2)^{1/2}}{1-\overline{z_n}z_j}$ για $1 \le j \le n$. Ομοίως,

$$\frac{1 - w'_j\overline{w'_k}}{1 - w_j\overline{w_k}} = \frac{1 - |w_n|^2}{(1 - \overline{w_n}w_j)(1 - w_n\overline{w_k})} = \beta_j\overline{\beta_k},$$

όπου $\beta_j = \frac{(1-|w_n|^2)^{1/2}}{1-\overline{w_n}w_j}$ για $1 \le j \le n$. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε

$$\frac{1 - w'_j\overline{w'_k}}{1 - z'_j\overline{z'_k}}t_j\overline{t_k} = \frac{1 - w_j\overline{w_k}}{1 - z_j\overline{z_k}}\Big(\frac{\beta_j}{\alpha_j}t_j\Big)\overline{\Big(\frac{\beta_k}{\alpha_k}t_k\Big)}.$$

Άρα

$$Q'_n(t_1, \dots, t_n) = Q_n\Big(\frac{\beta_1}{\alpha_1}t_1, \dots, \frac{\beta_n}{\alpha_n}t_n\Big).$$

Επομένως, $Q_n \ge 0$ αν και μόνο αν $Q'_n \ge 0$.
Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι, στην περίπτωση $|w_n| < 1$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $z_n = w_n = 0$.
Έστω ότι υπάρχει $f \in \mathcal{B}$ ώστε $f(0) = 0$ και $f(z_j) = w_j$ για $1 \le j \le n-1$. Τότε, όπως είδαμε στην απόδειξη του Λήμματος του Schwartz, υπάρχει $g \in \mathcal{B}$ ώστε να ισχύει $f(z) = zg(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{D}$. Αυτή η g ικανοποιεί τις $g(z_j) = \frac{w_j}{z_j}$ για $1 \le j \le n-1$.
Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή αν υπάρχει $g \in \mathcal{B}$ ώστε $g(z_j) = \frac{w_j}{z_j}$ για $1 \le j \le n-1$, τότε για την $f(z) = zg(z)$ έχουμε $f \in \mathcal{B}$ και $f(0) = 0$ και $f(z_j) = z_jg(z_j) = w_j$ για $1 \le j \le n-1$.
Αν η f είναι γινόμενο Blaschke βαθμού $d \le n$, τότε, επειδή $f(0) = 0$, η f είναι της μορφής

$$f(z) = \lambda z \prod_{j=1}^{d-1} \frac{z - u_j}{1 - \overline{u_j}z} \tag{12}$$

με $|\lambda| = 1$ και $u_j \in \mathbb{D}$ για $1 \le j \le d-1$. Άρα η g είναι γινόμενο Blaschke βαθμού $d-1 \le n-1$, αφού

$$g(z) = \lambda \prod_{j=1}^{d-1} \frac{z - u_j}{1 - \overline{u_j}z}. \tag{13}$$

Από τους τύπους (12) και (13) φαίνεται ότι ισχύει και το αντίστροφο: αν η g είναι γινόμενο Blaschke βαθμού $d-1 \le n-1$, τότε η f είναι γινόμενο Blaschke βαθμού $d \le n$.
Έχουμε λοιπόν ότι υπάρχει $f \in \mathcal{B}$ η οποία λύνει την παρεμβολή (7) (με $z_n = w_n = 0$) αν και μόνο αν υπάρχει $g \in \mathcal{B}$ η οποία λύνει την παρεμβολή

$$g(z_1) = \frac{w_1}{z_1}, \dots, g(z_{n-1}) = \frac{w_{n-1}}{z_{n-1}}.$$

Βάσει της επαγωγικής υπόθεσης, υπάρχει τέτοια g αν και μόνο αν η τετραγωνική μορφή

$$Q_{n-1}(s_1, \dots, s_{n-1}) = \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{1 - (\frac{w_j}{z_j})(\overline{\frac{w_k}{z_k}})}{1 - z_j\overline{z_k}} s_j\overline{s_k}$$

είναι μη αρνητική.
Επειδή $z_n = w_n = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} Q_n(t_1, ..., t_n) &= \frac{1 - |w_n|^2}{1 - |z_n|^2}|t_n|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1 - w_n\overline{w_j}}{1 - z_n\overline{zj}}t_n\overline{t_j} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1 - w_j\overline{w_n}}{1 - z_j\overline{z_n}}t_j\overline{t_n} \\ &\quad + \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{1 - w_j\overline{w_k}}{1 - z_j\overline{z_k}}t_j\overline{t_k} \\ &= |t_n|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\Big(t_n \sum_{j=1}^{n-1} \overline{t_j}\Big) + \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{1 - w_j\overline{w_k}}{1 - z_j\overline{z_k}}t_j\overline{t_k}. \end{aligned}$$

Η συμπλήρωση τετραγώνου δίνει

$$Q_n(t_1,\dots,t_n)=\Big|t_n+\sum_{j=1}^{n-1}t_j\Big|^2+\sum_{j,k=1}^{n-1}\Big(\frac{1-w_j\overline{w_k}}{1-z_j\overline{z_k}}-1\Big)t_j\overline{t_k}.$$

Επίσης έχουμε

$$\frac{1-w_j\overline{w_k}}{1-z_j\overline{z_k}}-1=\frac{z_j\overline{z_k}-w_j\overline{w_k}}{1-z_j\overline{z_k}}=\frac{1-(\frac{w_j}{z_j})\overline{(\frac{w_k}{z_k})}}{1-z_j\overline{z_k}}z_j\overline{z_k}.$$

Συνεπώς

$$Q_n(t_1,\dots,t_n)=\Big|\sum_{j=1}^{n}t_j\Big|^2+Q_{n-1}(z_1t_1,\dots,z_{n-1}t_{n-1}).$$

Έτσι, $Q_{n-1}\geq 0$ συνεπάγεται $Q_n\geq 0$. Αν θέσουμε $t_n=-\sum_{j=1}^{n-1}t_j$, βλέπουμε επίσης ότι $Q_n\geq 0$ συνεπάγεται ότι $Q_{n-1}\geq 0$. □

Παράδειγμα 4. Έστω $z_1,z_2\in\mathbb{D}$, $z_1\neq z_2$ και $w_1,w_2\in\mathbb{D}$. Θέλουμε να δούμε ποια είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη στα z_1,z_2,w_1,w_2 ώστε να υπάρχει $f\in\mathcal{B}$ με

$$f(z_1)=w_1,\quad f(z_2)=w_2.$$

Από το θεώρημα του Pick έχουμε την ικανή και αναγκαία συνθήκη $Q\geq 0$, όπου

$$Q(t_1,t_2)=\frac{1-|w_1|^2}{1-|z_1|^2}|t_1|^2+\frac{1-w_1\overline{w_2}}{1-z_1\overline{z_2}}t_1\overline{t_2}+\frac{1-w_2\overline{w_1}}{1-z_2\overline{z_1}}t_2\overline{t_1}+\frac{1-|w_2|^2}{1-|z_2|^2}|t_2|^2.$$

Σύμφωνα με το παράδειγμα 2, η Q είναι μη-αρνητική αν και μόνο αν:

$$\frac{1-|w_1|^2}{1-|z_1|^2}\geq 0,\quad \frac{1-|w_2|^2}{1-|z_2|^2}\geq 0,\quad \frac{1-w_1\overline{w_2}}{1-z_1\overline{z_2}}=\overline{\Big(\frac{1-\overline{w_1}w_2}{1-\overline{z_1}z_2}\Big)}$$

και

$$\Big|\frac{1-w_1\overline{w_2}}{1-z_1\overline{z_2}}\Big|^2\leq\frac{1-|w_1|^2}{1-|z_1|^2}\,\frac{1-|w_2|^2}{1-|z_2|^2}.$$

Οι τρεις πρώτες σχέσεις ισχύουν. Άρα η Q είναι μη αρνητική αν και μόνο αν

$$\frac{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}{|1-z_1\overline{z_2}|^2}\leq\frac{(1-|w_1|^2)(1-|w_2|^2)}{|1-w_1\overline{w_2}|^2}.$$

Με λίγες πράξεις βρίσκουμε

$$\frac{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}{|1-z_1\overline{z_2}|^2}=1-\Big|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z_2}}\Big|^2.$$

Ομοίως,

$$\frac{(1-|w_1|^2)(1-|w_2|^2)}{|1-w_1\overline{w_2}|^2}=1-\Big|\frac{w_1-w_2}{1-w_1\overline{w_2}}\Big|^2.$$

Άρα η Q είναι μη-αρνητική αν και μόνο αν

$$1-\Big|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z_2}}\Big|^2\leq 1-\Big|\frac{w_1-w_2}{1-w_1\overline{w_2}}\Big|^2$$

η, ισοδύναμα,

$$\Big|\frac{w_1-w_2}{1-w_1\overline{w_2}}\Big|\leq\Big|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_1}z_2}\Big|.$$

Η αναγκαιότητα αυτής της συνθήκης φαίνεται από την πρόταση 6.