Η ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΣΤΑΘΕΡΑ ΣΤΗΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ HAUSDORFF-YOUNG

Μεταπτυχιακη Εργασια

Του

Ι. Παρισση

Μαθηματικο Τμημα

Πανεπιστημιο Κρητης

Ηρακλειο 2002

Την επιτροπή κρίσης της μεταπτυχιακής αυτής εργασίας απετέλεσαν οι

Ε. Κατσοπρινάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής
Μ. Κολουντζάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής
Μ. Παπαδημητράκης, Αναπληρωτής Καθηγητής.

Ο Μ. Παπαδημητράκης επέβλεψε την εκπόνησή της.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ο μετασχηματισμός Fourier

1.1 Βασικοί ορισμοί

Εστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx \qquad , \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Το ολοκλήρωμα Lebesgue στη σχέση (1.1) συγκλίνει για κάθε ξ και έτσι ορίζεται η συνάρτηση $\widehat{f}$ η οποία ονομάζεται **μετασχηματισμός Fourier** της f. Χρησιμοποιείται συχνά ο συμβολισμός

$$\mathcal{F}f = \widehat{f}.$$

Οι παρακάτω είναι μερικές απο τις πολλές γνωστές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier :

- Ο τελεστής $\mathcal{F}$ είναι γραμμικός.
- Η συνάρτηση $\mathcal{F}f$ είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^n$, όπως φαίνεται πολύ εύκολα με απλή εφαρμογή του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης.
- $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\|f\|_1$.
- Για κάθε $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ το ολοκλήρωμα

  $$(f * g)(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$$

  ορίζεται για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, η οριζόμενη συνάρτηση $f * g$ είναι στοιχείο του $L^1(\mathbb{R}^n)$ και ονομάζεται **συνέλιξη** των f, g. Ισχύει ότι

  $$\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$$

  για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$, όπως αποδεικνύεται με εφαρμογή του Θεωρήματος του Fubini.

- Ένα παράδειγμα: για κάθε $\alpha > 0$

$$\text{αν } f(x) = e^{-\alpha|x|^2}, \text{ τότε } \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\alpha})^n} e^{-\frac{1}{4\alpha}|\xi|^2} \; . \tag{1.2}$$

Ο υπολογισμός αυτός, με εφαρμογή του Θεωρήματος του Fubini, ανάγεται στην περίπτωση μίας μεταβλητής και τότε διεκπεραιώνεται με εφαρμογή του Θεωρήματος του Cauchy της μιγαδικής ανάλυσης:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} \, dx \quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x+i\frac{\xi}{2\alpha})^2} \, dx \;\; e^{-\frac{1}{4\alpha}\xi^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \, dx \;\; e^{-\frac{1}{4\alpha}\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{1}{4\alpha}\xi^2} \; .
\end{aligned}$$

- Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε ισχύει ο **τύπος της αντιστροφής**

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \, d\xi \quad \text{για σχεδόν κάθε } x \in \mathbb{R}^n \; . \tag{1.3}$$

Η απόδειξη του τύπου (1.3) είναι στοιχειώδης αλλά όχι προφανής. Προκύπτει απο τον πιο κάτω υπολογισμό (όπου $\alpha > 0$):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} \widehat{f}(\xi) e^{-\alpha|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} \, d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \int_{R^n} f(y) e^{-iy\cdot\xi} dy e^{-\alpha|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} \, d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} f(y+x) \int_{R^n} e^{-\alpha|\xi|^2} e^{-iy\cdot\xi} \, d\xi dy \\
&= \int_{R^n} f(2\sqrt{\pi a} y + x) e^{-\pi|y|^2} dy \; .
\end{aligned}$$

Για την τρίτη ισότητα χρησιμοποιούμε τον τύπο (1.2). Επομένως

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} \widehat{f}(\xi) e^{-\alpha|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} \, d\xi - f(x) \right| \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{R^n} f(2\sqrt{\pi a} y + x) e^{-\pi|y|^2} \, dy - f(x) \right| \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{R^n} \left\{ f(2\sqrt{\pi a} y + x) - f(x) \right\} e^{-\pi|y|^2} \, dy \right| \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(2\sqrt{\pi a} y + x) - f(x) \right| \, dx \; e^{-\pi|y|^2} \, dy \; .
\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\phi_f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(u+x) - f(x)| \, dx$, τότε γνωρίζουμε ότι $0 \leq \phi_f(u) \leq 2\|f\|_1$ και $\phi_f(u) \longrightarrow 0$ όταν $|u| \to 0$. Άρα απο το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(2\sqrt{\pi a} y + x) - f(x) \right| \, dx \; e^{-\pi|y|^2} \, dy \longrightarrow 0 \quad \text{όταν } \; a \to 0^+ \; .$$

Άρα

$$f(x) = L^1 - \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-a|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} \, d\xi \; .$$

Επειδή $\widehat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$, απο το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης παίρνουμε τον (1.3) .

- Ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένα προς ένα τελεστής. Δηλαδή αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\widehat{f} = 0$, τότε $f = 0$.

  Αυτό είναι άμεση συνέπεια του τύπου (1.3) .

1.1.1 Ο μετασχηματισμός Fourier στο χώρο του Schwarz

Με $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ συμβολίζουμε το γνωστό χώρο του L.Schwartz. Μια μιγαδική συνάρτηση f είναι στοιχείο του $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ αν, εξ ορισμού, η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στον $\mathbb{R}^n$ και ισχύει ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}_o$ και κάθε πολυδείκτη $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_o^n$

$$\sup_x |x|^k \, |\partial^\alpha f(x)| = \sup_x |x|^k \left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) \right| < +\infty \ .$$

Όλες οι παρακάτω ιδιότητες είναι γνωστές και με εύκολη απόδειξη.

- Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ τότε $P \cdot f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ και $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ και για κάθε πολυδείκτη α.

- Αν $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, τότε $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

- Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, τότε $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

- Επομένως για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ισχύει ο τύπος της αντιστροφής (1.3) για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

  Απο τον τύπο (1.3) προκύπτει αμέσως ότι ο μετασχηματισμός Fourier , περιορισμένος στο χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, είναι ένα προς ένα και επί:

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \underset{\text{επί}}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

  και ότι

$$(\mathcal{F}^{-1} f)(\xi) = (\mathcal{F} f)(-\xi) \ .$$

- Αν $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, τότε ισχύουν οι ταυτότητες του Plancherel :

$$\begin{aligned} \int_{R^n} f(x)\overline{g(x)} \, dx &= \int_{R^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)} \, d\xi \\ \|f\|_2 &= \|\widehat{f}\|_2 \ . \end{aligned} \qquad (1.4)$$

  Οι δύο ταυτότητες είναι ισοδύναμες και η πρώτη προκύπτει αν στο πρώτο ολοκλήρωμα αντικαταστήσουμε το $f(x)$ με τον τύπο (1.3) και εφαρμόσουμε το θεώρημα του Fubini.

- Ο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνό υποσύνολο κάθε χώρου $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, αφού είναι γνωστό ότι το σύνολο των άπειρες φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα (υποσύνολο του $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) είναι πυκνό στους $L^p(\mathbb{R}^n)$.

1.1.2 Ο μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R}^n)$

Με βάση το γεγονός ότι ο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνό υποσύνολο του $L^2(\mathbb{R}^n)$ και τις ταυτότητες (1.4) είναι προφανές ότι ο $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \underset{\text{επί}}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} L^2(\mathbb{R}^n)$ επεκτείνεται σε ισομετρία

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \overset{\text{ισο}}{\longrightarrow} L^2(\mathbb{R}^n) \ .$$

Επιπλέον έχουμε τους εξής τύπους για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\xi) &= L^2 - \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|x|\leq R} f(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx \\ f(x) &= L^2 - \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|\xi|\leq R} (\mathcal{F}f)(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi \ . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Παρατηρείστε ότι για κάθε R το $\int_{|x|\leq R} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\, dx$ ορίζεται ως ολοκλήρωμα Lebesgue ενώ το $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\, dx$ εν γένει δεν ορίζεται. Ο πρώτος απο τους τύπους (1.5), και ομοίως ο δεύτερος, αποδεικνύεται αν θέσουμε

$$f_R(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } |x| \leq R \\ 0, & \text{αν } |x| > R \ . \end{cases}$$

Τότε αφενός

$$f_R \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{στον} \quad L^2(\mathbb{R}^n)$$

οπότε σύμφωνα με την ταυτότητα (1.4)

$$\mathcal{F}f_R \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F}f \quad \text{στον} \quad L^2(\mathbb{R}^n) \ .$$

Αφετέρου

$$(\mathcal{F}f_R)(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|x|\leq R} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\, dx \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

αφού $f_R \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

1.2 Η νόρμα του τελεστή $\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$

1.2.1 Η ανισότητα Hausdorff-Young

Έχουμε λοιπόν δει ότι ο μετασχηματισμός Fourier δρά στους χώρους $L^1(\mathbb{R}^n)$, $L^2(\mathbb{R}^n)$ και

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \ .$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}f\|_\infty &\leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \|f\|_1 \\ \|\mathcal{F}f\|_2 &= \|f\|_2 \ . \end{aligned}$$

Στην πρώτη ανισότητα η σταθερά $\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}$ είναι η βελτίστη, όπως φαίνεται αν θέσουμε $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$ και χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (1.2). Χρησιμοποιώντας τώρα το γνωστό θεώρημα παρεμβολής των M.Riesz και G.Thorin αποδεικνύεται αμέσως ότι για κάθε p , $1 < p < 2$, ο μετασχηματισμός Fourier επεκτείνεται απο τον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ στο μεγαλύτερο χώρο $L^p(\mathbb{R}^n)$ και ότι με $q = \frac{p}{p-1}$ ισχύει

$$\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \ .$$

Επιπλέον

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n(\frac{2}{p}-1)}} \|f\|_p \ . \tag{1.6}$$

Η ανισότητα (1.6) ονομάζεται **ανισότητα Hausdorff-Young**. Στην πραγματικότητα οι F. Hausdorff και W.H Young απέδειξαν την (1.6) στο πλαίσιο των σειρών Fourier και η (1.6) αποδείχθηκε σαν πόρισμα απο τον E. Titchmarsh. Η απόδειξη της (1.6) με χρήση του θεωρήματος παρεμβολής των M.Riesz και G.Thorin υπάρχει σε πολλά βιβλία. Για παράδειγμα στο [8], στο [3] και στο [5]. Οι αρχικές στοιχειώδεις (και ενδιαφέρουσες) αποδείξεις των Hausdorff, Young και Titchmarsh υπάρχουν στο [6].

Ας αναφερθεί, χάριν πληρότητας, ότι, αν $p > 2$, τότε ο τελεστής $\mathcal{F}$ δεν ορίζεται με τη "συνηθισμένη" έννοια στο χώρο $L^p(\mathbb{R}^n)$. Αν $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 2$, τότε η $\mathcal{F}f$ δεν είναι εν γένει συνάρτηση αλλά μπορεί να ορισθεί σαν μια tempered distribution.

1.2.2 Η βέλτιστη σταθερά στην ανισότητα Hausdorff-Young

Η σταθερά που παρουσιάζεται στην ανισότητα (1.6) **δεν** είναι η βέλτιστη όταν $1 < p < 2$. Ο K.I Babenko [1] προσδιόρισε τη βέλτιστη σταθερά c_p στην ανισότητα

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leq c_p \|f\|_p \tag{1.7}$$

στις περιπτώσεις $q = 4, 6, 8, \cdots$, δηλαδή όταν ο q είναι άρτιος ακέραιος. Ο W. Beckner [2] προσδιόρισε τη βέλτιστη σταθερά c_p για κάθε p , $1 < p < 2$.

Έστω

$$f(x) = c \ \exp \ \{-Ax \cdot x + b \cdot x\}$$

όπου $c \neq 0$, A είναι πραγματικός $n \times n$ πίνακας θετικά ορισμένος και $b = \mu + i \ \nu$ είναι μιγαδικό διάνυσμα (δηλαδή $\mu, \nu \in \mathbb{R}^n$). Κάθε τέτοια συνάρτηση ονομάζεται **συνάρτηση Gauss**. Γράφοντας $A = U^*DU$, όπου U είναι ορθογώνιος πίνακας και D είναι διαγώνιος πίνακας με θετικά διαγώνια στοιχεία και κάνοντας πράξεις χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.2) και απλές αλλαγές μεταβλητής καταλήγουμε στο

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{c}{\sqrt{2^n detA}} \exp \left\{ -\frac{1}{4} A^{-1}(\xi + i\ b) \cdot (\xi + i\ b) \right\} \ .$$

Τέλος, με απλούς υπολογισμούς παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= |c| \left(\sqrt{\frac{\pi}{p}} \right)^{\frac{n}{p}} \frac{1}{(\sqrt{detA})^{\frac{1}{p}}} \ \exp \left\{ -\frac{1}{4} A^{-1} \mu \cdot \mu \right\} \\ \|\widehat{f}\|_q &= |c| \left(\sqrt{\frac{2\pi}{q}} \right)^{\frac{n}{q}} \frac{1}{(\sqrt{2^n detA})^{\frac{1}{p}}} \ \exp \left\{ -\frac{1}{4} A^{-1} \mu \cdot \mu \right\} \ . \end{aligned}$$

Άρα

$$\|\widehat{f}\|_q = \left[\left(\sqrt{\frac{2\pi}{q}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sqrt{\frac{p}{2\pi}} \right)^{\frac{1}{p}} \right]^n \|f\|_p \ . \tag{1.8}$$

Οι Babenko και Beckner απέδειξαν (ο πρώτος μόνο όταν $q = 4, 6, 8, \ldots$) το :

Θεώρημα 1.2.1 *Για κάθε* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < 2$, $q = \frac{p}{p-1}$, *ισχύει:*

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leq c_{p,n} \|f\|_p \tag{1.9}$$

όπου $c_{p,n} = \left[\left(\sqrt{\frac{2\pi}{q}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sqrt{\frac{p}{2\pi}} \right)^{\frac{1}{p}} \right]^n$.

Η $c_{p,n}$ είναι προφανώς η βέλτιστη σταθερά στην ανισότητα (1.9) αφού αυτή γίνεται ισότητα όταν η f είναι συνάρτηση Gauss σύμφωνα με την (1.8).

Τέλος, ο Lieb [4] απέδειξε ότι η (1.9) γίνεται ισότητα μόνον όταν η f είναι συνάρτηση Gauss.

Σκοπός μας σε αυτήν την εργασία είναι να παρουσιάσουμε τις αποδείξεις των Babenko, Beckner για το Θεώρημα αυτό.

1.2.3 Αναγωγή στην περίπτωση της μίας μεταβλητής

Έστω T_x γραμμικός τελεστής ο οποίος δρα σε συναρτήσεις $f(x)$ μεταβλητής x και τις μετασχηματίζει σε συναρτήσεις $T_x\,[f(\cdot)]\,(\xi)$ μεταβλητής ξ. Επίσης έστω S_y γραμμικός τελεστής ο οποίος δρα σε συναρτήσεις $g(y)$ μεταβλητής y και τις μετασχηματίζει σε συναρτήσεις $S_y\,[g(\cdot)]\,(\eta)$ μεταβλητής η. Ορίζεται τότε το **τανυστικό γινόμενο** $T_x \otimes S_y$ το οποίο δρα σε συναρτήσεις $h(x, y)$ μεταβλητών x, y και τις μετασχηματίζει σε συναρτήσεις μεταβλητών ξ, η με τύπο

$$(T_x \otimes S_y)\ [h(\cdot,\cdot)]\,(\xi,\eta) \stackrel{\text{ορσ.}}{=} T_x\ [S_y\ [h(\cdot,\cdot)\,]\,(\eta)\,]\,(\xi)\ .$$

Βέβαια υπάρχει θέμα ως προς το αν ο $T_x \otimes S_y$ είναι καλά ορισμένος ανάλογα με τα πεδία ορισμού των T_x, S_y.

Λήμμα 1.2.1 (Nelson-Segal) *Έστω* $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, μ, ν, ρ, σ *τέσσερα σ-πεπερασμένα μέτρα και οι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές*

$$\begin{aligned} T_x \ &:\ L^p(X,\mu) \longrightarrow L^q(\Xi,\rho) \\ S_y \ &:\ L^p(Y,\nu) \longrightarrow L^q(H,\sigma)\ . \end{aligned}$$

Υποθέτουμε επίσης ότι η συνάρτηση $S_y\ [f(x,\cdot)\,]\,(\eta)$ *είναι* $\mu \times \sigma$*-μετρήσιμη καθώς και ότι η συνάρτηση* $T_x\ [S_y\ [f(\cdot,\cdot)\,]\,(\eta)\,]\,(\xi)$ *είναι* $\rho \times \sigma$*-μετρήσιμη για κάθε* $f \in L^p(X \times Y, \mu \times \nu)$. *Τότε ορίζεται το τανυστικό γινόμενο*

$$T_x \otimes S_y\ :\ L^p(X \times Y, \mu \times \nu) \longrightarrow L^q(\Xi \times H, \rho \times \sigma)$$

και

$$\|T_x \otimes S_y\| \leq \|T_x\| \|S_y\|\ .$$

Απόδειξη: Έστω $f(\cdot,\cdot) \in L^p\,(X \times Y, \mu \times \nu)$. Τότε για σχεδόν$(\mu)$ κάθε x η συνάρτηση $f(x,\cdot)$ είναι στοιχείο του $L^p\,(Y,\nu)$ και επομένως η συνάρτηση $S_y\,[f(x,\cdot)]\,(\cdot)$ είναι στοιχείο του $L^q\,(H,\sigma)$. Εφαρμόζοντας την ολοκληρωτική ανισότητα του Minkowski, αφού $\frac{q}{p} \geq 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} \left\{ \int_H \left| \int_X |S_y\,[f(x,\cdot)]\,(\eta)|^p \, d\mu(x) \right|^{\frac{q}{p}} d\sigma(\eta) \right\}^{\frac{p}{q}} &\leq \int_X \left\{ \int_H |S_y\,[f(x,\cdot)]\,(\eta)|^q \, d\sigma(\eta) \right\}^{\frac{p}{q}} d\mu(x) \\ &\leq \|S_y\|^p \int_X \left\{ \int_Y |f(x,y)|^p \, d\nu(y) \right\} d\mu(x) \\ &= \|S_y\|^p \;\; \|f\|^p_{L^p(X \times Y, \mu \times \nu)} < +\infty \; . \qquad (1.10) \end{aligned}$$

Άρα, για σχεδόν(σ) κάθε η ισχύει

$$\int_X |S_y\,[f(x,\cdot)]\,(\eta)|^p \, d\mu(x) < +\infty$$

και επομένως $S_y\,[f(\cdot,\cdot)]\,(\eta) \in L^p\,(X,\mu)$. Άρα, για σχεδόν$(\sigma)$ κάθε η έχει νόημα η

$$T_x\;\,[S_y\;\,[f(\cdot,\cdot)\,]\,(\eta)\,]\,(\cdot)$$

και ανοίκει στο χώρο $L^q\,(\Xi,\rho)$. Άρα για σχεδόν$(\rho \times \sigma)$ κάθε (ξ,η) έχει νόημα το

$$(T_x \otimes S_y)\;\,[f(\cdot,\cdot)]\,(\xi,\eta) = T_x\;\,[S_y\;\,[f(\cdot,\cdot)\,]\,(\eta)\,]\,(\xi)$$

και

$$\begin{aligned} \|\,(T_x \otimes S_y)\;\,[f]\,\|_{L^q(\Xi \times H, \rho \times \sigma)} &= \left\{ \int_H \int_\Xi |T_x\;\,[S_y\;\,[f(\cdot,\cdot)\,]\,(\eta)\,]\,(\xi)|^q \, d\rho(\xi)\; d\sigma(\eta) \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|T_x\| \left\{ \int_H \left| \int_X |S_y\;\,[f(x,\cdot)\,]\,(\eta)|^p \, d\mu(x) \right|^{\frac{q}{p}} d\sigma(\eta) \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|T_x\|\; \|S_y\|\; \|f\|_{L^p(X \times Y, \mu \times \nu)} \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει λόγω της (1.10). □

Η επέκταση του Λήμματος σε περισσότερες μεταβλητές είναι προφανής και άμεση.

Αυτό το Λήμμα μας επιτρέπει να ανάγουμε το πρόβλημα προσδιορισμού της $c_{p,n}$ στη μία διάσταση. Πράγματι, έστω ότι για κάθε p με $1 < p < 2$ ισχύει ότι

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leq c_{p,1}\;\|f\|_p$$

για κάθε συνάρτηση $f \in L^p(\mathbb{R})$.

Θεωρούμε n αντίγραφα του μετασχηματισμού Fourier στη μία διάσταση:

$$\mathcal{F}_{x_j} \;:\; L^p(X_j,\mu_j) \longrightarrow L^q(\Xi_j,\rho_j)$$

όπου $X_1 = \cdots = X_n = \Xi_1 = \cdots = \Xi_n = \mathbb{R}$ και $\mu_1 = \cdots = \mu_n = \rho_1 = \cdots = \rho_n = \lambda$, όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$ και

$$(\mathcal{F}_{x_j}f)(\xi_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_j) e^{-ix_j\xi_j} \ dx_j \quad , \quad \xi_j \in \mathbb{R}$$

για κάθε $f \in \mathcal{S}(X_j)$. Τότε για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(\xi) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} \ dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[\cdots \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \cdots, x_n) e^{-ix_n\xi_n} \ dx_n \right] \cdots \right] e^{-ix_2\xi_2} \ dx_2 \right] e^{-ix_1\xi_1} \ dx_1 \\ &= \mathcal{F}_{x_1} \left[\mathcal{F}_{x_2} \left[\cdots \left[\mathcal{F}_{x_n} \left[f(\cdot, \cdot, \cdots, \cdot) \right] \right] \cdots \right] \right] (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \\ &= (\mathcal{F}_{x_1} \otimes \mathcal{F}_{x_2} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{x_n}) \left[f(\cdot, \cdot, \ldots, \cdot) \right] (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \ . \end{aligned}$$

Άρα ο $\mathcal{F}$ ταυτίζεται με το τανυστικό γινόμενο $\mathcal{F}_{x_1} \otimes \mathcal{F}_{x_2} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{x_n}$ στον πυκνό υπόχωρο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ του $L^p(\mathbb{R}^n)$, οπότε, σύμφωνα με το Λήμμα 1.2.1

$$\|\mathcal{F}\| \le \|\mathcal{F}_{x_1}\| \|\mathcal{F}_{x_2}\| \cdots \|\mathcal{F}_{x_n}\| = c_{p,1}^n = c_{p,n} \ .$$

Στα επόμενα τρία κεφάλαια θα ασχοληθούμε με την παρουσίαση της εργασίας του Babenko (Κεφάλαιο 3) και της εργασίας του Beckner (Κεφάλαιο 4) για την απόδειξη της ανισότητας

$$\|\mathcal{F}f\|_q \le c_p \|f\|_p$$

για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}),\ 1 < p < 2,$ όπου $c_p = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{q}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sqrt{\frac{p}{2\pi}}\right)^{\frac{1}{p}}$ και $q = \frac{p}{p-1}$. Το Κεφάλαιο 2 περιλαμβάνει βασικά στοιχεία για τις συναρτήσεις Hermite και τον πυρήνα του Mehler τα οποία χρησιμοποιούνται τόσο στην εργασία του Babenko όσο και σε αυτήν του Beckner.

Κεφάλαιο 2

Οι συναρτήσεις Hermite και ο πυρήνας του Mehler

2.1 Ορισμοί και μερικές βασικές ιδιότητες

Ορισμός 2.1.1 *Είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις*

$$H_k(x) = (-1)^k \; e^{x^2} \; \frac{d^k}{dx^k} \; e^{-x^2} \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

είναι πολυώνυμα βαθμού k. Για παράδειγμα:

$$H_o(x) = 1, \; H_1(x) = 2x, \; H_2(x) = 4x^2 - 2, \; H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

*κ.ο.κ. Τα πολυώνυμα αυτά ονομάζονται **πολυώνυμα Hermite.***

Λήμμα 2.1.1

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \frac{H_n(x)}{n!} = e^{2tx - t^2} \quad , t \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R} \; . \tag{2.1}$$

Απόδειξη: Γράφοντας τη σειρά Taylor της συνάρτησης $e^{-(x-t)^2}$ έχουμε

$$\begin{aligned} e^{-(x-t)^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\frac{d^n}{dt^n} e^{-(x-t)^2} \right)_{t=0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} (-1)^n \left(\frac{d^n}{dt^n} e^{-(x+t)^2} \right)_{t=0} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \qquad = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-x^2} H_n(x) \; . \end{aligned}$$

Απο εδώ προφανώς προκύπτει η (2.1). □

Λήμμα 2.1.2

$$2xH_{k+1}(x) = H_{k+2}(x) + 2(k+1)H_k(x) \tag{2.2}$$

$$H_k^{''}(x) - 2xH_k^{'}(x) = -2kH_k(x) \; . \tag{2.3}$$

Απόδειξη: Η σχέση (2.2) προκύπτει ως εξής. Ονομάζουμε $\phi(t)$ τη συνάρτηση

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} \left\{ H_{k+2}(x) + 2(k+1)H_k(x) - 2xH_{k+1}(x) \right\} \ .$$

Τότε απο την (2.1) παίρνουμε

$$\phi(t) = e^{2tx-t^2} - 1 - 2tx + 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k+2}}{k!(k+2)} H_k(x) - 2x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} H_{k+1}(x)$$

και παραγωγίζοντας κατά τα γνωστά τις σειρές Taylor

$$\phi^{'}(t) = (2x-2t)e^{2tx-t^2} - 2x + 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k+1}}{k!} H_k(x) - 2x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} H_{k+1}(x) \ .$$

Άρα, χρησιμοποιώντας πάλι την (2.1)

$$\phi^{'}(t) = (2x-2t)e^{2tx-t^2} - 2x + 2te^{2tx-t^2} - 2x\left(e^{2tx-t^2} - 1\right) = 0 \ .$$

Άρα η $\phi(t)$ είναι σταθερή συνάρτηση και, επειδή απο τον ορισμό της ισχύει προφανώς ότι $\phi(0) = 0$, συνεπάγεται ότι $\phi(t) = 0$. Άρα όλοι οι συντελεστές είναι μηδέν.

Για την απόδειξη της (2.3) εργαζόμαστε ως εξής. Απο τον ορισμό έχουμε

$$H_{k+1}^{'}(x) = (-1)^{k+1} 2xe^{x^2} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} e^{-x^2} + (-1)^{k+1} e^{x^2} \frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}} e^{-x^2} = 2xH_{k+1}(x) - H_{k+2}(x)$$

οπότε βάσει της (2.2) έχουμε

$$H_{k+1}^{'}(x) = 2(k+1)H_k(x) = 2(k+1)(-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2} \ .$$

Άρα

$$\begin{aligned} \left(e^{-x^2} H_{k+1}^{'}(x)\right)^{'} &= 2(k+1)(-1)^k \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \ e^{-x^2} \\ -2xe^{-x^2} H_{k+1}^{'}(x) + e^{-x^2} H_{k+1}^{''}(x) &= -2(k+1) \ e^{-x^2} H_{k+1}(x) \ . \end{aligned}$$

Απλοποιώντας παίρνουμε την (2.3) για $k = 1, 2, 3, \ldots$. Είναι προφανές ότι η (2.3) ισχύει και για $k = 0$. □

Ορισμός 2.1.2 *Οι συναρτήσεις*

$$\psi_k(x) = \frac{1}{(2^k k! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , k = 0, 1, 2, \ldots$$

ονομάζονται ***συναρτήσεις Hermite*** *και προφανώς είναι στοιχεία του* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Λήμμα 2.1.3

$$\psi_k^{''}(x) - x^2\psi_k(x) = -(2k+1)\psi_k(x) \tag{2.4}$$

Απόδειξη: Αν θέσουμε $c_k = \frac{1}{\left(2^k k! \sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}}$ τότε

$$
\begin{aligned}
\psi_k^{''}(x) - x^2\psi_k(x) &= c_k \left\{ H_k^{'}(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xH_k(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \right\}^{'} - c_k x^2 H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= c_k \left\{ H_k^{''}(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xH_k^{'}(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - \right. \\
&\quad \left. - H_k(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - \ xH_k^{'}(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right\} - c_k x^2 H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= c_k \left\{ H_k^{''}(x) - 2xH_k^{'}(x) - H_k(x) \right\} e^{-\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}
$$

οπότε βάσει της (2.3)

$$\psi_k^{''}(x) - x^2\psi_k(x) = -(2k+1)c_k H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = -(2k+1)\psi_k(x) \ . \qquad \square$$

Ορισμός 2.1.3 *Ορίζουμε τον* ***πυρήνα του Mehler***

$$K(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \exp\left\{ \frac{x^2-y^2}{2} - \frac{(x-yt)^2}{1-t^2} \right\}$$

για πραγματικούς x, y και μιγαδικό t με $|t| < 1$.

Θεώρημα 2.1.1

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \psi_n(x)\psi_n(y) = K(x,y,t) \ . \tag{2.5}$$

Απόδειξη: Απο τη σχέση (1.2) έχουμε

$$e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+2iux} \ du$$

και παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+2iux} \ du \right\} = (-2i)^k e^{x^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+2iux} u^k \ du \ .$$

Συνεπώς

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \psi_n(x)\psi_n(y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \frac{t^n}{\sqrt{\pi} n! 2^n} H_n(x) H_n(y) \qquad (2.6) \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} e^{\frac{x^2+y^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-2tuv)^n}{n!} \exp\left\{-u^2 - v^2 + 2iux + 2ivy\right\} \ dudv \ .
\end{aligned}
$$

Επειδή

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-2tuv)^n}{n!} \exp\left\{-u^2 - v^2 + 2iux + 2ivy\right\} \right| &= e^{-u^2-v^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|2tuv|^n}{n!} \\
&= e^{-u^2-v^2+2|tuv|}
\end{aligned}
$$

και επειδή η τελευταία συνάρτηση είναι (αφού $|t|<1$) ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, συνεπάγεται απο το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης ότι επιτρέπεται εναλλαγή ολοκληρώματος και σειράς στην (2.6) και παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\psi_n(x)\psi_n(y) &= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}e^{\frac{x^2+y^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-u^2-v^2+2iux+2ivy-2tuv\right\}\,dudv\\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}e^{\frac{x^2+y^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}e^{2iux}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(v+tu)^2}e^{2ivy}\,dv\right\}e^{t^2u^2}\,du\ .\end{aligned}$$

Αν τώρα περιοριστούμε σε πραγματικό t με $-1<t<1$, τότε η τελευταία παράσταση είναι σύμφωνα με την (1.2) ίση με

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}e^{\frac{x^2+y^2}{2}}e^{-y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}e^{2iux}e^{t^2u^2}e^{-2ituy}du &= \frac{1}{\pi}e^{\frac{x^2-y^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(1-t^2)u^2+2i(x-yt)u}\,du\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}}\exp\left\{\frac{x^2-y^2}{2}-\frac{(x-yt)^2}{1-t^2}\right\}\\ &= K(x,y,t)\ .\end{aligned}$$

Άρα η (2.5) αποδείχθηκε για $-1<t<1$. Επομένως η δυναμοσειρά του αριστερού μέλους της (2.5) συγκλίνει για κάθε μιγαδικό t με $|t|<1$ και είναι αναλυτική στο δίσκο αυτό. Η συνάρτηση στο δεξί μέλος της (2.5) είναι προφανώς αναλυτική συνάρτηση του t στον ίδιο δίσκο, οπότε απο την αρχή αναλυτικής συνέχισης η ισότητα επεκτείνεται για μιγαδικό t με $|t|<1$. □

Παρατηρούμε ότι εξ ορισμού

$$K(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}}\exp\left\{-\frac{1+t^2}{2(1-t^2)}x^2-\frac{1+t^2}{2(1-t^2)}y^2+\frac{2t}{1-t^2}xy\right\} \tag{2.7}$$

και, επειδή $\mathrm{Re}\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)>0$ για κάθε t με $|t|<1$, συνεπάγεται ότι η $K(x,y,t)$ είναι στο χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ και επομένως σε κάθε χώρο $L^p(\mathbb{R})$ ως προς κάθε μια απο τις μεταβλητές x,y. Άρα για κάθε $f\in L^p(\mathbb{R})$ ορίζεται η συνάρτηση

$$\left(K_t f\right)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y,t)f(y)\,dy\ .$$

Παρατηρούμε ότι κάθε παράγωγος ως προς x και, λόγω συμμετρίας, ως προς y της $K(x,y,t)$ είναι της μορφής

$$\frac{d^k}{dx^k}K(x,y,t)=P(x,y,t)K(x,y,t)\quad,\quad\frac{d^k}{dy^k}K(x,y,t)=P(y,x,t)K(x,y,t)$$

όπου $P(x,y,t)$ είναι πολυώνυμο ως προς x,y συνολικού βαθμού k με συντελεστές συναρτήσεις του t.

Λήμμα 2.1.4 *Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, t μιγαδικό με $|t|<1$ και κάθε πολυώνυμο $P(x,y,t)$ ως προς x,y συνολικού βαθμού k ισχύει*

$$\|P(x,\cdot,t)K(x,\cdot,t)\|_q\le c_{q,t}\left(1+|x|\right)^k\exp\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}x^2\right\}\ .$$

Απόδειξη: Αν θέσουμε $A = \frac{1}{2}\ \mathrm{Re}\frac{1+t^2}{1-t^2} > 0$, $\quad \mathrm{B} = \mathrm{Re}\frac{t}{1-t^2}$ στην (2.7), τότε

$$\begin{aligned}
|K(x,y,t)| &= \frac{1}{\sqrt{\pi\,|1-t^2|}} \exp\left\{-Ax^2 - Ay^2 + 2Bxy\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi\,|1-t^2|}} \exp\left\{-\frac{A^2-B^2}{A}x^2 - \left(\sqrt{A}y - \frac{B}{\sqrt{A}}x\right)^2\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi\,|1-t^2|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\ \frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}x^2 - u^2\right\}
\end{aligned}$$

όπου $u = \sqrt{A}\ y - \frac{B}{\sqrt{A}}x$.

Άρα, αν $q = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} |P(x,y,t)K(x,y,t)|\,dy = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi\,|1-t^2|\,A}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}x^2\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|P\left(x, \frac{1}{\sqrt{A}}u + \frac{B}{A}x, t\right)\right| e^{-u^2} du \\
&\leq \left(\frac{2\,|1-t^2|}{\pi(1-|t|^4)}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\ \frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}x^2\right\} \sum_{n=0}^{k} c_n(t)\,|x|^n \\
&\leq c_{1,t}\,(1+|x|)^k\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\ \frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}x^2\right\}\ .
\end{aligned}$$

Ομοίως, αν $q = +\infty$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\max_y |P(x,y,t)K(x,y,t)| = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi\,|1-t^2|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\ \frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}x^2\right\} \max_u \left|P\left(x, \frac{1}{\sqrt{A}}u + \frac{B}{A}x, t\right)\right| e^{-u^2} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\pi\,|1-t^2|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\ \frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}x^2\right\} \sum_{n=0}^{k} d_n(t)\,|x|^n \\
&\leq c_{\infty,t}\,(1+|x|)^k \exp\left\{-\frac{1}{2}\ \frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}x^2\right\}\ .
\end{aligned}$$

Τέλος, αν $1 < q < +\infty$, έχουμε με συνδυασμό των δύο προηγούμενων περιπτώσεων

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |P(x,y,t)K(x,y,t)|^q\,dy &\leq \left(\max_y |P(x,y,t)K(x,y,t)|\right)^{q-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(x,y,t)K(x,y,t)|\ dy \\
&\leq c_{\infty,t}^{q-1} c_{1,t}\,(1+|x|)^{qk} \exp\left\{-\frac{1}{2}\ q\ \frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}x^2\right\}
\end{aligned}$$

απ'οπου συνεπάγεται αμέσως το Λήμμα. □

Λήμμα 2.1.5 *Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R})$, t μιγαδικό με $|t| < 1$ συνεπάγεται ότι η $K_t f$ είναι στο χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ και ειδικότερα σε κάθε χώρο $L^q(\mathbb{R})$.*

Απόδειξη: Απο το Λήμμα 2.1.4 συνεπάγεται ότι για κάθε k

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(K_t f\right)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x,y,t)K(x,y,t)f(y)\ dy$$

όπου $P(x,y,t)$ είναι πολυώνυμο συνολικού βαθμού k ως προς x, y και ότι αν $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}\left(K_t f\right)(x)\right| \leq c_{q,t}\left(1+|x|\right)^k \exp\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}x^2\right\}\|f\|_p\ . \tag{2.8}$$

Άρα η $K_t f$ είναι στο χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

Λήμμα 2.1.6 *Οι συναρτήσεις Hermite* $\psi_k(x),\ k=0,1,2,\ldots$ *, είναι ορθοκανονικό σύστημα στον* $L^2(\mathbb{R})$.

Απόδειξη: Απο τη σχέση (2.4) του Λήμματος 2.1.3 έχουμε όταν $m \neq n$

$$\begin{aligned}
\psi_m^{''}(x)\psi_n(x) - x^2\psi_m(x)\psi_n(x) &= -(2m+1)\psi_m(x)\psi_n(x)\\
\psi_n^{''}(x)\psi_m(x) - x^2\psi_n(x)\psi_m(x) &= -(2n+1)\psi_n(x)\psi_m(x)
\end{aligned}$$

και αφαιρώντας

$$2(n-m)\psi_m(x)\psi_n(x) = \psi_m^{''}(x)\psi_n(x) - \psi_m(x)\psi_n^{''}(x) = \left(\psi_m^{'}(x)\psi_n(x) - \psi_m(x)\psi_n^{'}(x)\right)^{'}\ .$$

Άρα

$$2(n-m)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m(x)\psi_n(x)\ dx = \left(\psi_m^{'}(x)\psi_n(x) - \psi_m(x)\psi_n^{'}(x)\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0\ .$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε την (2.5) του Θεωρήματος 2.1.1 για $0 \leq t < 1$ και $x = y$ παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\psi_n^2(x) = K(x,x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}}\exp\left\{-\frac{1-t}{1+t}x^2\right\}\ .$$

Επειδή η σειρά που εμφανίζεται αποτελείται απο μη αρνητικούς όρους, μπορούμε να ολοκληρώσουμε και να πάρουμε :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^2(x)\ dx = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1-t}{1+t}x^2\right\}\ dx = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n\ .$$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^2(x)\ dx = 1 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}_o\ .$$

□

Λήμμα 2.1.7

(i) $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y,t)\ dy = \sqrt{\frac{2}{1+t^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1-t^2}{1+t^2}x^2\right\}$, *οπότε* $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y,t)\ dy \longrightarrow 1$, *αν* $t \to 1$.

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} |K(x,y,t)|\ dy = \sqrt{\frac{2|1-t^2|}{1-|t|^4}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}x^2\right\}$.

Άρα, για κάθε $c \geq 1$ *ισχύει* $\int_{-\infty}^{+\infty} |K(x,y,t)|\ dy \leq 2\sqrt{c}$, *αν* t *είναι μιγαδικός με* $|t| < 1$ *και* $\frac{|1-t|}{1-|t|} \leq c$.

(iii) $|K(x,y,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi|1-t^2|}} \exp\left\{-\frac{1}{4}\frac{1-|t|^2}{|1-t|^2}(x-y)^2\right\}$.

Απόδειξη: Οι αποδείξεις των $(i), (ii)$ είναι ζήτημα απλών πράξεων χρησιμοποιώντας την (2.7). Η (iii) αποδεικνύεται βάσει του τύπου

$$K(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{4}\frac{1+t}{1-t}(x-y)^2 - \frac{1}{4}\frac{1-t}{1+t}(x+y)^2\right\}$$

ο οποίος προκύπτει επίσης απο την (2.7). □

Το Λήμμα 2.1.7 εκφράζει το γεγονός ότι ο πυρήνας του Mehler συμπεριφέρεται ως **προσέγγιση της μονάδας**. Όπως είναι αναμενόμενο, έχουμε σαν άμεση συνέπεια το

Θεώρημα 2.1.2 *Έστω τυχόν* $c \geq 1$.

(α) Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R})$ *με* $1 \leq p < +\infty$ *ισχύει ότι* $\lim \|K_t f - f\|_p = 0$ *όταν* $t \to 1$ *παίρνοντας μιγαδικές τιμές με* $|t| < 1$ *και* $\frac{|1-t|}{1-|t|} \leq c$.

(β) Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R})$ *ισχύει ότι* $\|K_t f\|_p \leq 2\sqrt{\frac{|1-t|}{|1+t|(1-|t|^2)}}\|f\|_p$ *και επομένως*

$$\|K_t f\|_p \leq \sqrt{2c(c+1)}\|f\|_p$$

αν ο t *είναι μιγαδικός με* $|t| < 1$ *και* $\frac{|1-t|}{1-|t|} \leq c$.

Απόδειξη: (α)

$$\begin{aligned}
\|K_t f - f\|_p &= \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y,t)f(y)\ dy - f(x)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y,t)\,(f(y)-f(x))\ dy\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} + \\
&+ \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y,t)\ dy - 1\right|^p |f(x)|^p\ dx\right\}^{\frac{1}{p}} = A + B\ .
\end{aligned}$$

Τότε κατ΄ αρχήν απο το Λήμμα 2.1.7(i) :

$$B^p = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\sqrt{\frac{2}{1+t^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1-t^2}{1+t^2}x^2\right\} - 1\right|^p |f(x)|^p\ dx \longrightarrow 0$$

όταν $t \to 1$, το οποίο είναι φανερό αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης. Κατόπιν, απο το Λήμμα 2.1.7(iii):

$$\begin{aligned} A &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi\,|1-t^2|}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{4}\frac{1-|t|^2}{|1-t|^2}(x-y)^2\right\}|f(y)-f(x)|\;dy\right|^p\;dx\right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\,|1-t^2|}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{4}\frac{1-|t|^2}{|1-t|^2}y^2\right\}|f(x-y)-f(x)|\;dy\right|^p\;dx\right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi\,|1-t^2|}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-y)-f(x)|^p\;dx\right\}^{\frac{1}{p}}\exp\left\{-\frac{1}{4}\frac{1-|t|^2}{|1-t|^2}y^2\right\}dy \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει απο την ολοκληρωτική ανισότητα του Minkowski.

Τώρα ορίζουμε

$$\phi_f(y) = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-y)-f(x)|^p\;dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leq 2\|f\|_p$$

και είναι γνωστό ότι $\phi_f(y) \longrightarrow 0$ όταν $y \to 0$ για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R})$. Άρα

$$\begin{aligned} A &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi\,|1-t^2|}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_f(y)\exp\left\{-\frac{1}{4}\frac{1-|t|^2}{|1-t|^2}y^2\right\}\;dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{|1+t|\,(1+|t|)}}\sqrt{\frac{|1-t|}{1-|t|}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_f\left(\frac{2\sqrt{\pi}\,|1-t|}{\sqrt{1-|t|^2}}y\right)e^{-\pi y^2}\;dy\;. \end{aligned}$$

Επομένως, αν $\frac{|1-t|}{1-|t|} \leq c$, τότε

$$A \leq \sqrt{2c(c+1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_f\left(2\sqrt{\pi}\;\sqrt{\frac{|1-t|}{1+|t|}}\sqrt{\frac{|1-t|}{1-|t|}}y\right)e^{-\pi y^2}\;dy \longrightarrow 0$$

όταν $t \to 1$, με εφαρμογή του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης.

(β)

$$\|K_t f\|_p = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y,t)f(y)\;dy\right|^p\;dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

το οποίο απο το Λήμμα 2.1.7(iii) είναι

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi\,|1-t^2|}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{4}\frac{1-|t|^2}{|1-t|^2}(x-y)^2\right\}|f(y)|\;dy\right)^p\;dx\right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\,|1-t^2|}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{4}\frac{1-|t|^2}{|1-t|^2}y^2\right\}|f(x-y)|\;dy\right)^p\;dx\right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi\,|1-t^2|}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-y)|^p\;dx\right\}^{\frac{1}{p}}\exp\left\{-\frac{1}{4}\frac{1-|t|^2}{|1-t|^2}y^2\right\}\;dy \\ &= 2\sqrt{\frac{|1-t|}{|1+t|\,(1-|t|^2)}}\|f\|_p \end{aligned}$$

απο την ολοκληρωτική ανισότητα του Minkowski. □

Θεώρημα 2.1.3 *Οι συναρτήσεις Hermite $\psi_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, αποτελούν ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{R})$.*

Απόδειξη: Ήδη απο το Λήμμα 2.1.6 γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις Hermite αποτελούν ορθοκανονικό υποσύνολο του $L^2(\mathbb{R})$.

Απο τον τύπο (2.5) του Θεωρήματος 2.1.1 έχουμε για κάθε x και κάθε μιγαδικό t με $|t| < 1$ ότι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |t^n \psi_n(x)|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |t|^{2n}\, \psi_n^2(x) = K(x, x, |t|^2) < +\infty\ .$$

Άρα, για κάθε x και t με $|t| < 1$ η σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \psi_n(x) \psi_n$$

συγκλίνει σύμφωνα με το Θεώρημα Riesz - Fischer σε κάποια συνάρτηση του $L^2(\mathbb{R})$ (με τη σύγκλιση του $L^2(\mathbb{R})$).

Επειδή η ίδια σειρά συγκλίνει σημειακά (ως προς y) στην $K(x, y, t)$ συνεπάγεται ότι για κάθε x και κάθε t με $|t| < 1$

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} t^n \psi_n(x) \psi_n(\cdot) = K(x, \cdot, t) \quad \text{στον} \quad L^2(\mathbb{R}). \tag{2.9}$$

Άρα για κάθε x, κάθε t με $|t| < 1$ και κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \psi_n(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\psi_n(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y, t) f(y)\, dy = (K_t f)(x)\ . \tag{2.10}$$

Τώρα για κάθε t με $|t| < 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| t^n \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\psi_n(y)\, dy \right|^2 \le \sum_{n=0}^{+\infty} |t|^{2n} \|f\|_2 < +\infty\ .$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\psi_n(y)\, dy \psi_n$$

συγκλίνει, πάλι σύμφωνα με το Θεώρημα Riesz - Fischer, σε κάποια συνάρτηση του $L^2(\mathbb{R})$.

Λόγω της (2.10) συνεπάγεται ότι για κάθε t με $|t| < 1$

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} t^n \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\psi_n(y)\, dy\ \psi_n(\cdot) = (K_t f)(\cdot) \quad \text{στον} \quad L^2(\mathbb{R}). \tag{2.11}$$

Έστω τώρα $f \in L^2(\mathbb{R})$ και $\epsilon > 0$. Απο το Θεώρημα 2.1.2(α) υπάρχει t με $0 \le t < 1$ ώστε $\|K_t f - f\|_2 < \frac{\epsilon}{2}$ και απο την (2.11) υπάρχει N ώστε

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} t^n \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\psi_n(y)\, dy\ \psi_n - K_t f \right\|_2 < \frac{\epsilon}{2}\ .$$

Άρα

$$\Big\| \sum_{n=0}^{N} t^n \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\psi_n(y)\ dy\ \psi_n - f \Big\|_2 < \epsilon\ .$$

Δηλαδή η f προσεγγίζεται απο γραμμικούς συνδυασμούς των $\psi_o,\ \psi_1,\ \psi_2\ ,\ldots$ οπότε οι συναρτήσεις Hermite παράγουν τον $L^2(\mathbb{R})$. □

Βάσει του Θεωρήματος 2.1.3 ισχύουν οι γνωστές σχέσεις για κάθε $f,g \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\text{αν} \qquad \alpha_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi_n(x)\ dx\ ,\ \beta_n = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\psi_n(x)\ dx,$$

$$\text{δηλαδή αν} \quad f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\psi_n \quad ,\quad g \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n\psi_n, \qquad \text{τότε}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\ dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\overline{\beta_n} \quad , \\ \|f\|_2^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \quad , \end{aligned}$$

($f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\psi_n$ σημαίνει ότι $\sum_{n=0}^{N} \alpha_n\psi_n \longrightarrow f$ στον $L^2(\mathbb{R})$ όταν $N \to +\infty$).

Απο τη σχέση (2.11) φαίνεται καθαρά ο τρόπος δράσης του τελεστή K_t στον $L^2(\mathbb{R})$: απλώς πολλαπλασιάζει τους συντελεστές στη σειρά Fourier της f (σχετικά με την ορθοκανονική βάση των συναρτήσεων Hermite) με τους πολλαπλασιαστές t^n. Δηλαδή

$$\text{αν} \qquad f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\psi_n, \qquad \text{τότε} \qquad K_t f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} t^n\alpha_n\psi_n \quad . \tag{2.12}$$

Απο την (2.12) συνεπάγεται αυτομάτως ότι οι $\psi_n,\ n = 0,1,2,\ldots$, είναι ιδιοσυναρτήσεις του K_t με αντίστοιχες ιδιοτιμές t^n : $\qquad K_t\psi_n = t^n\psi_n$.

Θεώρημα 2.1.4 *Η οικογένεια τελεστών* $\{K_t \mid t \in \mathbb{C}\ ,\ |t| < 1\}$ *αποτελεί αναλυτική ημιομάδα τελεστών παραμετρικοποιημένη με τα σημεία του μοναδιαίου δίσκου του* $\mathbb{C}$.

Απόδειξη: Για κάθε $t, s \in \mathbb{C}$ με $|t|,\ |s| < 1$ και για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$ με $f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\psi_n$ έχουμε βάσει της (2.12) :

$$K_t f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} t^n\alpha_n\psi_n$$

και επομένως

$$(K_s \circ K_t)\, f = K_s\,(K_t f) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} s^n t^n\alpha_n\psi_n \sim K_{st} f\ .$$

Άρα

$$K_s \circ K_t = K_{st}\ . \tag{2.13}$$

Αυτή είναι η ιδιότητα της ημιομάδας. Για την αναλυτικότητα πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$ η συνάρτηση $K_t f$ του t έχει μιγαδική παράγωγο. Πράγματι, θα αποδείξουμε ότι αν $f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \psi_n$,τότε το

$$\lim_{s \to t} \frac{K_s f - K_t f}{s - t}$$

υπάρχει στον $L^2(\mathbb{R})$ και ισούται με τη συνάρτηση $g \sim \sum_{n=0}^{+\infty} n t^{n-1} \alpha_n \psi_n$.

Για κάθε s με $|s| < 1$ έχουμε ότι

$$\frac{K_s f - K_t f}{s - t} - g \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \left\{ \frac{s^n - t^n}{s - t} - n t^{n-1} \right\} \psi_n$$

και επομένως

$$\begin{aligned} \left\| \frac{K_s f - K_t f}{s - t} - g \right\|_2^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \left| \frac{s^n - t^n}{s - t} - n t^{n-1} \right|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \left| s^{n-1} + s^{n-2} t + \cdots + s t^{n-2} + t^{n-1} - n t^{n-1} \right|^2 . \end{aligned}$$

Αφού $s \to t$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $|s - t| < \frac{1 - |t|}{2}$. Τότε όμως

$$|s| \le \frac{1 + |t|}{2} \qquad \text{και} \qquad |t| = \frac{|t|}{2} + \frac{|t|}{2} \le \frac{1 + |t|}{2} .$$

Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\alpha_n|^2 \left| \frac{s^n - t^n}{s - t} - n t^{n-1} \right|^2 &\le |\alpha_n|^2 \left\{ n \left(\frac{1 + |t|}{2} \right)^{n-1} + n\, |t|^{n-1} \right\}^2 \\ &\le 4 n^2 |\alpha_n|^2 \left(\frac{1 + |t|}{2} \right)^{2(n-1)} . \end{aligned}$$

Επειδή $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 |\alpha_n|^2 \left(\frac{1+|t|}{2} \right)^{2(n-1)} < +\infty$, απο το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για σειρές παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{s \to t} \left\| \frac{K_s f - K_t f}{s - t} - g \right\|_2^2 &= \lim_{s \to t} \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \left| \frac{s^n - t^n}{s - t} - n t^{n-1} \right|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{s \to t} \left(|\alpha_n|^2 \left| \frac{s^n - t^n}{s - t} - n t^{n-1} \right|^2 \right) = 0 . \end{aligned}$$

□

2.2 Ο μετασχηματισμός Fourier στο χώρο $L^2(\mathbb{R})$

Θεώρημα 2.2.1

$$\widehat{\psi_n} = (-i)^n \psi_n \ .$$

Απόδειξη: Αν θέσουμε $c_n = \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}$, τότε

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi_n}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(\xi) e^{-ix\xi} \ dx = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right) e^{-ix\xi} \ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{\frac{x^2}{2} - ix\xi} \right) \ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{\frac{1}{2}(x - i\xi)^2} \right) \ dx \ e^{\frac{1}{2}\xi^2} \\
&= \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^n}{d\xi^n} \left(e^{\frac{1}{2}(x - i\xi)^2} \right) \ dx \ e^{\frac{1}{2}\xi^2} \\
&= i^n c_n e^{\frac{1}{2}\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{\frac{1}{2}(x - i\xi)^2} \ dx \right) \\
&= i^n c_n e^{\frac{1}{2}\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} = (-i)^n \psi_n(\xi) \ .
\end{aligned}$$

$\square$

Άρα η ορθοκανονική βάση των συναρτήσεων Hermite αποτελεί πλήρες σύστημα ιδιοδιανυσμάτων του $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$. Αν $f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \psi_n$ τότε

$$f = L^2 - \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \psi_n$$

και επειδή ο $\mathcal{F}$ είναι ισομετρία

$$\mathcal{F} f = L^2 - \lim_{N \to +\infty} \mathcal{F} \left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \psi_n \right) = L^2 - \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} (-i)^n \alpha_n \psi_n .$$

Άρα

$$\text{αν} \quad f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \psi_n \quad , \text{τότε} \quad \widehat{f} \sim \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n \alpha_n \psi_n \ . \tag{2.14}$$

Έστω, τώρα, $f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \psi_n$. Απο την (2.12) έχουμε $K_t f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \alpha_n \psi_n$ και απο την (2.14) $\widehat{K_t f} \sim \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n t^n \alpha_n \psi_n \sim K_{-it} f$.

Άρα

$$\widehat{K_t f} = K_{-it} f \ . \tag{2.15}$$

Θεώρημα 2.2.2 *Για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$ ισχύει ότι*

$$\lim_{t \to 1} \|K_t f - f\|_2 = 0 \quad , \quad \lim_{t \to 1} \|K_{-it} f - \widehat{f} \ \|_2 = 0.$$

Απόδειξη: Αν $f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \psi_n$, τότε βάσει των (2.12), (2.14) και (2.15) έχουμε

$$\|K_t f - f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |1 - t^n|^2 \, |\alpha_n|^2$$

$$\|K_{-it} f - \widehat{f}\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |(-i)^n - (-it)^n|^2 \, |\alpha_n|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |1 - t^n|^2 \, |\alpha_n|^2$$

και το αποτέλεσμα του θεωρήματος είναι άμεσο. □

Έτσι λοιπόν ο ταυτοτικός τελεστής I και ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F}$ εμφανίζονται ως «συνοριακές τιμές» της ημιομάδας $\{K_t \mid t \in \mathbb{C}\ ,\ |t| < 1\}$ όταν $t = 1$ και $t = -i$ αντιστοίχως.

Αξίζει να αναφερθεί ότι

A. Οι σχέσεις (2.14) χρησιμεύουν και ως δεύτερος τρόπος ορισμού του μετασχηματισμού Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$. Δηλαδή, για κάθε $f \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \psi_n$, **ορίζουμε** $\widehat{f}$ τη συνάρτηση με σειρά Fourier $\sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n \alpha_n \psi_n$. Αυτή η συνάρτηση υπάρχει βάσει του θεωρήματος Riesz - Fischer. Ο τρόπος αυτός ορισμού του μετασχηματισμού Fourier παρουσιάζεται στο [6].

B. Το Θεώρημα 2.2.2 παρέχει τρίτο τρόπο ορισμού του μετασχηματισμού Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$. Δηλαδή για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$ **ορίζουμε** $\widehat{f}$ να είναι το $L^2 - \lim_{t \to 1} K_{-it} f$. Ο τρόπος αυτός παρουσιάζεται διεξοδικά στο βιβλίο [7].

Με όποιο τρόπο απο τους δύο ορίσουμε το $\widehat{f}$ μένει να αποδειχθεί ότι

$$\widehat{f}(\xi) = L^2 \ - \ \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} f(x) e^{-ix\xi} \, dx$$

ώστε, βάσει του τύπου (1.5) να ταυτισθεί ο νέος ορισμός με τον ορισμό που δώσαμε στο Κεφάλαιο 1. Η απόδειξη περιγράφεται στα προαναφερθέντα [6], [7].

Θεώρημα 2.2.3 *Για κάθε* $f \in L^p(\mathbb{R}),\ 1 \leq p \leq +\infty$

$$\widehat{K_t f} = K_{-it} f \ .$$

Απόδειξη: Καταρχήν παρατηρούμε ότι ο $\widehat{K_t f}$ δεν έχει πρόβλημα ύπαρξης διότι η $K_t f$ είναι στο χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ βάσει του Λήμματος 2.1.5.

Η σχέση (2.9) λόγω συμμετρίας συνεπάγεται ότι $K(\cdot, y, t) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \psi_n(y) \psi_n(\cdot)$ και επομένως, απο τη σχέση (2.14), παίρνουμε

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y, t) e^{-ix\xi} \, dx \sim \sum_{n=0}^{+\infty} (-it)^n \psi_n(y) \psi_n(\xi) = K(\xi, y, -it)$$

σαν συναρτήσεις του ξ. Επειδή και οι δύο πλευρές είναι στο χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ συνεπάγεται ότι

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y, t) e^{-ix\xi} \, dx = K(\xi, y, -it)$$

για κάθε ξ, y και μιγαδικό t με $|t| < 1$.

Τώρα για τυχούσα $f \in L^p(\mathbb{R})$ έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{K_t f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y,t)f(y)\;dy\right)e^{-ix\xi}\;dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y,t)\;e^{-ix\xi}\;dx\right)f(y)\;dy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi,y,-it)f(y)\;dy = \left(K_{-it}f\right)(\xi)\;.\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 2.2.4 *Για κάθε p,q ο τελεστής $K_t : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^q(\mathbb{R})$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη: Έστω τυχούσα ακολουθία $\{f_n\}$ στον $L^p(\mathbb{R})$ με $\|f_n\|_p \leq 1$ για κάθε n.

Απο τις σχέσεις (2.8) συνεπάγεται ότι

(i) $|K_t f_n(x)| \leq C\;\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}x^2\right\} \leq C$,

(ii) $\left|\frac{d}{dx}\left(K_t f_n\right)(x)\right| \leq C\left(1+|x|\right)\;\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}x^2\right\} \leq C\;'$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα των Arzela και Ascoli συμπεραίνουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ και συνεχής συνάρτηση g ώστε

$$K_t f_{n_k} \longrightarrow g$$

ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Αν $1 \leq q < +\infty$, τότε, ακριβώς όπως φθάσαμε στην (i) φθάνουμε και στην

$$\begin{aligned}\left|\left(K_t f_{n_k}\right)(x) - \left(K_t f_{n_\lambda}\right)(x)\right|^q &\leq C^q \exp\left\{-\frac{q}{2}\frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}x^2\right\}\|f_{n_k} - f_{n_\lambda}\|_p^q\\ &\leq 2^q C^q \exp\left\{-\frac{q}{2}\frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}x^2\right\}\;.\end{aligned}$$

Η τελευταία συνάρτηση είναι στον $L^1(\mathbb{R})$, οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\left(K_t f_{n_k}\right)(x) - \left(K_t f_{n_\lambda}\right)(x)\right|^q\;dx \longrightarrow 0 \quad \text{όταν} \quad k,\lambda \to +\infty.$$

Άρα η $\{K_t f_{n_k}\}$ είναι Cauchy στον $L^q(\mathbb{R})$ και επομένως $K_t f_{n_k} \longrightarrow g$ στον $L^q(\mathbb{R})$. Άρα ο K_t είναι συμπαγής τελεστής στην περίπτωση $1 \leq q < +\infty$.

Έστω τώρα $q = +\infty$.

Απο την (i) παίρνουμε αμέσως ότι

$$|g(x)| \leq \;C\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1-|t|^2}{1+|t|^2}x^2\right\}$$

και επομένως η g μηδενίζεται στο άπειρο. Έστω τώρα $\epsilon > 0$. Απο την (i) συνεπάγεται ότι υπάρχει $R > 0$ κοινό για όλες τις f_{n_k} και την g ώστε : $\left|\left(K_t f_{n_k}\right)(x)\right| \leq \frac{\epsilon}{2}$ και $|g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε x με

$|x| > R$ και κάθε k. Επειδή $K_t f_{n_k} \longrightarrow g$ ομοιόμορφα στο $[-R, R]$, συνεπάγεται ότι για αρκετά μεγάλο k ισχύει $|(K_t f_{n_k})(x) - g(x)| \leq \epsilon$ για κάθε x με $|x| \leq R$. Άρα για αρκετά μεγάλο k ισχύει

$$|(K_t f_{n_k})(x) - g(x)| \leq \epsilon$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $K_t f_{n_k} \longrightarrow g$ στον $L^\infty(\mathbb{R})$.

Άρα ο K_t είναι συμπαγής και στην περίπτωση $q = +\infty$. $\square$

Κεφάλαιο 3

Η εργασία του K.I. Babenko

3.1 Εφαρμογή στοιχειώδους λογισμού μεταβολών

Έστω $1 < p < 2$ και $q = \frac{p}{p-1}$. Για να υπολογίσει τη βέλτιστη σταθερά στην ανισότητα

$$\|\widehat{f}\|_q \leq \mu \|f\|_p \quad , \; f \in L^p(\mathbb{R}) \; , \tag{3.1}$$

ο Babenko, αντί να θεωρήσει απλά το μετασχηματισμό Fourier

$$f \longmapsto \widehat{f} \; ,$$

σταθεροποιεί ένα t με $0 < t < 1$ και παρεμβάλλει τον τελεστή K_t:

$$f \longmapsto K_t f \longmapsto \widehat{K_t f} \; . \tag{3.2}$$

Κατόπιν υπολογίζει τη βέλτιστη σταθερά στην ανισότητα

$$\|\widehat{K_t f}\|_q \leq \mu_t \|f\|_p \quad , \; f \in L^p(\mathbb{R}) \tag{3.3}$$

και εκμεταλλεύεται τα εξής:

(α) Η συνάρτηση $K_t f$ είναι, σύμφωνα με το Λήμμα 2.1.5, στο χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ οπότε υπάρχει ελευθερία διεκπεραίωσης πράξεων.

(β) (Ακόμα σημαντικότερο). Επειδή $\widehat{K_t f} = K_{-it} f$ (Θεώρημα 2.2.3) το σχήμα (3.2) ανάγεται στον τελεστή

$$f \longmapsto K_{-it} f$$

ο οποίος είναι συμπαγής (Θεώρημα 2.2.4) και επομένως υπάρχει συνάρτηση $f \neq 0$ η οποία «πιάνει» τη βέλτιστη σταθερά μ_t στην ανισότητα (3.3).

(γ) Αν υπολογισθεί η σταθερά μ_t, τότε, λόγω του Θεωρήματος 2.1.2(α), απο την $\|K_{-it} f\|_q \leq \mu_t \|f\|_p$ και απο την $K_{-it} f = K_t(\widehat{f})$ για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, παίρνουμε

$$\|\widehat{f}\|_q \leq \mu \|f\|_p \quad , \; f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

όπου $\mu = \lim_{t \to 1^-} \mu_t$.

Λήμμα 3.1.1 *Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης*

$$\mu_t = \sup_{\|f\|_p \le 1} \|\widehat{g}\|_q \quad \mu\epsilon \;\; g = K_t f \; . \tag{3.4}$$

Υπάρχει $f \in L^p(\mathbb{R})$ *ώστε, με* $g = K_t f$, *να ισχύει*

$$\|\widehat{g}\|_q = \mu_t \quad \kappa\alpha\iota \quad \|f\|_p = 1 \; . \tag{3.5}$$

Επίσης κάθε τέτοια f *ικανοποιεί την*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} K_t \left(|\widehat{g}|^{q-2} \, \widehat{g} \right)(y) \; e^{ixy} \; dy = \mu_t^q \, |f(x)|^{p-2} \, f(x) \; . \tag{3.6}$$

Απόδειξη: Το (3.4) ισοδυναμεί με

$$\mu_t = \sup_{\|f\|_p \le 1} \|K_{-it} f\|_q \; .$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα (2.2.4) ο $K_{-it} \, : \, L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^q(\mathbb{R})$ είναι συμπαγής. Έστω λοιπόν ακολουθία $\{f_n\}$ με $\|f_n\|_p \le 1$ και $\|K_{-it} f_n\|_q \longrightarrow \mu_t$. Τότε υπάρχει υποακολουθία $\{f_{n_k}\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς-$\star$ σε κάποια f με $\|f\|_p \le 1$ και η $\{K_{-it}(f_{n_k})\}$ συγκλίνει ισχυρά στην $K_{-it} f$. Επομένως $\|K_{-it} f\|_q = \mu_t$ και $\|f\|_p = 1$, διότι αν $\|f\|_p < 1$, τότε με $f_1 = \frac{1}{\|f\|_p} f$ θα είχαμε $\|f_1\|_p = 1$ και $\|K_{-it} f_1\|_q = \frac{1}{\|f\|_p} \|K_{-it} f\|_q > \mu_t$. Άρα υπάρχει f ώστε

$$\|\widehat{g}\|_q = \mu_t \quad \text{και} \quad \|f\|_p = 1$$

με $g = K_t f$.

Στη συνέχεια της απόδειξης θα χρησιμοποιήσουμε το

Λήμμα 3.1.2 *Αν* $h, f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < +\infty$ *και* $f_\epsilon = f + \epsilon h$, *τότε η συνάρτηση* $\rho(\epsilon) = \|f_\epsilon\|_p^p$ *είναι παραγωγίσιμη και*

$$\frac{d}{d\epsilon}\{\rho(\epsilon)\} = p \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) + \epsilon h(x)|^{p-2} \, \mathrm{Re} \left\{ (f(x) + \epsilon h(x)) \overline{h(x)} \right\} \; dx \; . \tag{3.7}$$

Απόδειξη: $\rho(\epsilon) = \|f_\epsilon\|_p^p = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) + \epsilon h(x)|^p \; dx$. Έστω $f = f_1 + i f_2, \; h = h_1 + i h_2$. Τότε $|f(x) + \epsilon h(x)|^p = \left[(f_1(x) + \epsilon h_1(x))^2 + (f_2(x) + \epsilon h_2(x))^2 \right]^{\frac{p}{2}}$, οπότε

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} |f(x) + \epsilon h(x)|^p &= \frac{p}{2} \left[(f_1(x) + \epsilon h_1(x))^2 + (f_2(x) + \epsilon h_2(x))^2 \right]^{\frac{p}{2}-1} \cdot \\ &\qquad 2 \left[(f_1(x) + \epsilon h_1(x)) h_1(x) + (f_2(x) + \epsilon h_2(x)) h_2(x) \right] \\ &= p \, |f(x) + \epsilon h(x)|^{p-2} \, \mathrm{Re} \left\{ (f(x) + \epsilon h(x)) \overline{h(x)} \right\} \; . \end{aligned}$$

Περιορίζοντας τώρα το ϵ σε οποιοδήποτε φραγμένο διάστημα $-M < \epsilon < M$ έχουμε

$$\left| \frac{d}{d\epsilon} |f(x) + \epsilon h(x)|^p \right| \le p \left[\, |f(x)| + M \, |h(x)| \, \right]^{p-1} \; |h(x)| \quad \text{και}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\ |f(x)| + M\,|h(x)|\ ]^{p-1}\,|h(x)|\ dx \le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [\ |f(x)| + M\,|h(x)|\ ]^{p}\ dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|h\|_p$$

$$\le [\ \|f\|_p + M\|h\|_p\ ]^{p-1}\,\|h\|_p < +\infty\ .$$

Άρα παίρνοντας πηλίκα διαφορών της $\rho(\epsilon)$ και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης παίρνουμε εύκολα ότι η $\rho(\epsilon)$ είναι παραγωγίσιμη και

$$\frac{d}{d\epsilon}\{\rho(\epsilon)\} = p\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)+\epsilon h(x)|^{p-2}\,\mathrm{Re}\left\{(f(x)+\epsilon h(x))\overline{h(x)}\right\}\ dx\ . \qquad \square$$

Συνέχεια της απόδειξης του Λήμματος 3.1.1:

Έστω λοιπόν f με

$$\|f\|_p = 1 \quad \text{και} \quad \|\widehat{g}\|_q = \mu_t \tag{3.8}$$

όπου $g = K_t f$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f_\epsilon(x) = f(x) + \epsilon h(x)$$

όπου h είναι τυχούσα συνάρτηση στον $L^p(\mathbb{R})$. Έστω

$$g_\epsilon(x) = (K_t f_\epsilon)(x) = (K_t f)(x) + \epsilon (K_t h)(x) = g(x) + \epsilon (K_t h)(x)\ .$$

και

$$\phi(\epsilon) = \frac{\|\widehat{g}_\epsilon\|_q}{\|f_\epsilon\|_p} = \frac{\|\widehat{g} + \epsilon\widehat{K_t h}\|_q}{\|f+\epsilon h\|_p}\ .$$

Έχουμε

$$\phi(\epsilon) = \frac{\|\widehat{K_t f_\epsilon}\ \|_q}{\|f_\epsilon\|_p} = \left\|\mathcal{F}\left(K_t\left(\frac{f_\epsilon}{\|f_\epsilon\|_p}\right)\right)\right\|_q \le \mu_t = \frac{\|\widehat{g}\|_q}{\|f\|_p} = \phi(0)$$

για κάθε $\epsilon \in \mathbb{R}$. Επειδή σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.2 έχουμε ότι η ϕ είναι παραγωγίσιμη, συνεπάγεται ότι

$$\phi\,'(0) = 0\ . \tag{3.9}$$

Απο την (3.7)

$$p\ \|f_\epsilon\|_p^{p-1}\ \frac{d}{d\epsilon}\|f_\epsilon\|_p = \frac{d}{d\epsilon}\left(\ \|f_\epsilon\|_p^p\ \right) = p\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\epsilon(x)|^{p-2}\,\mathrm{Re}\left\{f_\epsilon(x)\overline{h(x)}\right\}\ dx$$

οπότε

$$\left(\ \frac{d}{d\epsilon}\|f_\epsilon\|_p\ \right)_{\epsilon=0} = \frac{1}{\|f\|_p^{p-1}}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^{p-2}\,\mathrm{Re}\left\{f(x)\overline{h(x)}\right\}\ dx$$

και ομοίως

$$\left(\ \frac{d}{d\epsilon}\|\widehat{g}_\epsilon\|_q\ \right)_{\epsilon=0} = \frac{1}{\|\widehat{g}\|_q^{q-1}}\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(x)|^{q-2}\,\mathrm{Re}\left\{\widehat{g}(x)\overline{(\widehat{K_t h})(x)}\right\}\ dx\ .$$

Άρα η (3.9) γίνεται και με βάση τις (3.8)

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\|f\|_p}\left(\frac{d}{d\epsilon}\|\widehat{g_\epsilon}\|_q\right)_{\epsilon=0} - \frac{1}{\|f\|_p^2}\|\widehat{g}\|_q\left(\frac{d}{d\epsilon}\|f_\epsilon\|_p\right)_{\epsilon=0} \\
&= \frac{1}{\mu_t^{q-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{g}(x)|^{q-2}\,\mathrm{Re}\left\{\widehat{g}(x)\overline{\widehat{(K_t h)}(x)}\right\}\,dx \;-\mu_t\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^{p-2}\,\mathrm{Re}\left\{f(x)\overline{h(x)}\right\}\,dx\,.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Όμως

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{g}(x)|^{q-2}\,\widehat{g}(x)\overline{\widehat{(K_t h)}(x)}\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{g}(x)|^{q-2}\,\widehat{g}(x)\overline{(K_{-it}h)\,(x)}\,dx \\
= \; & \int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{g}(x)|^{q-2}\,\widehat{g}(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{K\,(x,y,-it)h(y)}\,dy\,dx \\
= \; & \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{K\,(x,y,-it)}\,|\widehat{g}(x)|^{q-2}\,\widehat{g}(x)\,dx\,\overline{h(y)}\,dy \\
= \; & \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y,it)\,|\widehat{g}(x)|^{q-2}\,\widehat{g}(x)\,dx\,\overline{h(y)}\,dy\,.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Απο τις (3.10), (3.11) συμπεραίνουμε ότι

$$
0 = \mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}K\,(y,x,it)\,|\widehat{g}(y)|^{q-2}\,\widehat{g}(y)\,dy - \mu_t^q\,|f(x)|^{p-2}\,f(x)\right]\overline{h(x)}\,dx\right\}
$$

για κάθε $h \in L^p(\mathbb{R})$. Άρα

$$
\mu_t^q\,|f(x)|^{p-2}\,f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}K\,(y,x,it)\,|\widehat{g}(y)|^{q-2}\,\widehat{g}(y)\,dy\,. \tag{3.12}
$$

Απο τη σχέση (2.7) είναι φανερό ότι $K\,(y,x,it) = K\,(x,y,it) = K\,(-x,y,-it)$. Άρα η (3.12) γίνεται

$$
\begin{aligned}
\mu_t^q\,|f(x)|^{p-2}\,f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty}K\,(-x,y,-it)\,|\widehat{g}(y)|^{q-2}\,\widehat{g}(y)\,dy \\
&= K_{-it}\left(|\widehat{g}|^{q-2}\,\widehat{g}\right)(-x) = \mathcal{F}\left(K_t\left(|\widehat{g}|^{q-2}\,\widehat{g}\right)\right)(-x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}K_t\left(|\widehat{g}|^{q-2}\,\widehat{g}\right)(y)e^{ixy}\,dy
\end{aligned}
$$

και αυτή είναι η σχέση (3.6). □

3.2 Αναγωγή σε σύστημα δύο ολοκληρωτικών εξισώσεων και επίλυσή του

Η επόμενη ιδέα είναι να μετασχηματίσουμε τις σχέσεις $g = K_t f$ και (3.6) σε δύο συμμετρικές σχέσεις: τις (3.15), (3.16) που εμφανίζονται πιο κάτω.

Περιοριζόμαστε πλέον σε $0 < t < 1$ και θέτουμε

$$\theta = \frac{1-t^2}{2(1+t^2)} > 0, \quad \tau = \frac{2t}{1+t^2} > 0 \ .$$

Με λίγες πράξεις είναι εύκολο να δούμε ότι

$$K(x, y, -it) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \exp\left\{-\theta x^2 - \theta y^2 - i\tau xy\right\} \ .$$

Άρα

$$\begin{aligned} \widehat{g}(x) &= \widehat{K_t f}(x) = (K_{-it} f)(x) = \\ &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \exp\left\{-\theta x^2 - \theta y^2 - i\tau xy\right\} \, dy \ . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ομοίως, η (3.6) γίνεται

$$\begin{aligned} \mu_t^q \left|f(x)\right|^{p-2} f(x) &= \mathcal{F}\left(K_t\left(|\widehat{g}|^{q-2}\,\widehat{g}\right)\right)(-x) \\ &= \left(K_{-it}\left(|\widehat{g}|^{q-2}\,\widehat{g}\right)\right)(-x) \\ &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(y)|^{q-2}\,\widehat{g}(y) \exp\left\{-\theta x^2 - \theta y^2 + i\tau xy\right\} \, dy \ . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Θέτουμε

$$\phi(x) = |f(x)|^{p-2} f(x) \quad , \quad \psi(x) = \widehat{g}(x)$$

οπότε, επειδή $|\phi(x)|^{q-2}\,\phi(x) = f(x)$, οι (3.13), (3.14) γίνονται

$$\mu_t^q \phi(x) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(y)|^{q-2}\,\psi(y) \exp\left\{-\theta x^2 - \theta y^2 + i\tau xy\right\} \, dy \tag{3.15}$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(y)|^{q-2}\,\phi(y) \exp\left\{-\theta x^2 - \theta y^2 - i\tau xy\right\} \, dy \ . \tag{3.16}$$

Η συνάρτηση ψ είναι εξ ορισμού στο χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, διότι η g είναι στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Η ϕ είναι εξ ορισμού στον $L^q(\mathbb{R})$, αλλά αν παρατηρήσουμε τη σχέση (3.15) βλέπουμε ότι $\mu_t^q \phi(x) = K_{-it}\left(|\psi|^{q-2}\,\psi\right)(-x)$ και επομένως και η ϕ είναι στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ βάσει του Λήμματος 2.1.5.

Λήμμα 3.2.1 *Οι συναρτήσεις ϕ, ψ επεκτείνονται στο $\mathbb{C}$ σε ακέραιες συναρτήσεις τάξης το πολύ 2.*

Απόδειξη: Ορίζουμε για $z = x + iy$

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{1}{\mu_t^q}\sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(u)|^{q-2}\,\psi(u) \exp\left\{-\theta z^2 - \theta u^2 + i\tau zu\right\} \, du \\ &= \frac{1}{\mu_t^q}\sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}}\, e^{-\theta z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(u)|^{q-2}\,\psi(u) \exp\left\{-\theta u^2 + i\tau zu\right\} \, du \ . \end{aligned} \tag{3.17}$$

Το ολοκλήρωμα είναι καλά ορισμένο διότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| |\psi(u)|^{q-2} \psi(u) \exp\left\{-\theta u^2 + i\tau z u\right\} \right| \, du$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(u)|^{q-1} \exp\left\{-\theta u^2 - \tau y u\right\} \, du < +\infty \, .$$

Εύκολα βλέπουμε περνώντας παραγώγους μέσα στο ολοκλήρωμα ότι η $\phi(z)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann και επομένως είναι ακέραια συνάρτηση η οποία προφανώς ταυτίζεται με την $\phi(x)$ για $z = x \in \mathbb{R}$ λόγω της (3.15).

Ακόμα έχουμε

$$\begin{aligned}
|\phi(z)| &= |\phi(x+iy)| \leq \frac{1}{\mu_t^q}\sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} e^{-\theta(x^2-y^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(u)|^{q-1} \exp\left\{-\theta u^2 - \tau y u\right\} \, du \\
&\leq \frac{1}{\mu_t^q}\sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \, e^{-\theta(x^2-y^2)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(u)|^q \, du\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-q\theta u^2 - q\tau y u\right\} \, du\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{\mu_t^q}\sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{q\theta}}\right)^{\frac{1}{q}} e^{-\theta x^2 + \left(\theta + \frac{\tau^2}{4\theta}\right) y^2} \|\psi\|_q^{\frac{q}{p}} = \frac{1}{\mu_t^q}\sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{q\theta}}\right)^{\frac{1}{q}} e^{-\theta x^2 + \frac{1}{4\theta} y^2} \|\psi\|_q^{\frac{q}{p}} \\
&\leq c \, e^{\frac{1}{4\theta} y^2} \leq c \, e^{\frac{1}{4\theta} |z|^2} \, .
\end{aligned}$$

Άρα η $\phi(z)$ είναι τάξης το πολύ 2.

Ομοίως, αν ορίσουμε

$$\psi(z) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(u)|^{q-2} \phi(u) \exp\left\{-\theta z^2 - \theta u^2 - i\tau z u\right\} \, du \tag{3.18}$$

αποδεικνύεται ότι η $\psi(z)$ είναι ακέραια συνάρτηση που ταυτίζεται με την $\psi(x)$ για $z = x \in \mathbb{R}$ και είναι τάξης το πολύ 2. □

Κατά την απόδειξη του Λήμματος 3.2.1 προέκυψε η εκτίμηση

$$|\phi(x+iy)| \leq \frac{1}{\mu_t^q}\sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{q\theta}}\right)^{\frac{1}{q}} \|\psi\|_q^{\frac{q}{p}} \exp\left\{-\theta x^2 + \frac{1}{4\theta} y^2\right\} \tag{3.19}$$

και με όμοιο τρόπο βρίσκουμε και την

$$|\psi(x+iy)| \leq \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{q\theta}}\right)^{\frac{1}{q}} \|\phi\|_q^{\frac{q}{p}} \exp\left\{-\theta x^2 + \frac{1}{4\theta} y^2\right\} \, . \tag{3.20}$$

Οι εκτιμήσεις (3.19), (3.20) δεν είναι αρκετές για την επίλυση του συστήματος των (3.15), (3.16). Μια ειδικώτερου τύπου περιγραφή του μεγέθους των ϕ, ψ δίνεται στο Λήμμα 3.2.2 παρακάτω.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$A^2 + \frac{p\theta}{\tau} A - \frac{p}{4q} = 0 \, . \tag{3.21}$$

Επειδή $-\frac{p}{4q} < 0$ συνεπάγεται ότι η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μία θετική ρίζα την οποία συμβολίζουμε A και θέτουμε

$$A_1 = \tau A + \theta \ . \tag{3.22}$$

Επίσης για ευκολία θέτουμε

$$\xi(z) = e^{A_1 z^2}\ \phi(z) \quad , \quad \eta(z) = e^{A_1 z^2}\psi(z) \ . \tag{3.23}$$

Λήμμα 3.2.2 *Η ακέραια συνάρτηση $\xi(z)$ ικανοποιεί την*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-qA_1 v^2}\ |\xi(v+x+iy)|^q\ dv \leq 1$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Οι σχέσεις - ορισμοί (3.17), (3.18) μαζί με την (3.21) δίνουν μετά απο λίγες στοιχειώδεις πράξεις τις σχέσεις

$$\mu_t^q e^{-\tau A z^2}\xi(z) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2}\ |\eta(u)|^{q-2}\,\eta(u)\ e^{i\tau z u}\ du \tag{3.24}$$

$$e^{-\tau A z^2}\eta(z) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2}\ |\xi(u)|^{q-2}\,\xi(u)\ e^{-i\tau z u}\ du \ . \tag{3.25}$$

Επίσης οι (3.19), (3.20) με την (3.21) δίνουν τις σχέσεις

$$|\xi(x+iy)| \quad \leq \quad c_1 \exp\left\{\tau A x^2 + \left(\frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A\right) y^2\right\} \tag{3.26}$$

$$|\eta(x+iy)| \quad \leq \quad c_2 \exp\left\{\tau A x^2 + \left(\frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A\right) y^2\right\} \ . \tag{3.27}$$

Στην (3.24) αντικαθιστούμε το $z = x + iy$ με $v + z = (v + x) + iy$, $v \in \mathbb{R}$, κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $u \mapsto u - 2Ay$ στο ολοκλήρωμα και έχουμε

$$\mu_t^q e^{-\tau A(x+v+iy)^2}\xi(x+v+iy) =$$

$$= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau}{4A}(u-2Ay)^2}\ |\eta(u-2Ay)|^{q-2}\,\eta(u-2Ay)e^{i\tau(x+v+iy)(u-2Ay)}\ du$$

το οποίο μετά απο λίγες απλοποιήσεις δίνει

$$\mu_t^q e^{-\tau A v^2}\xi(x+v+iy) =$$

$$= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}}e^{2\tau A x v}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau}{4A}(u-i2Ax)^2}\ |\eta(u-2Ay)|^{q-2}\,\eta(u-2Ay)e^{i\tau v u}\ du \ . \tag{3.28}$$

Αν τώρα γράψουμε τη δυναμοσειρά της ακέραιας συνάρτησης $\eta(z)$

$$\eta(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n \ ,$$

μπορούμε να ορίσουμε την επίσης ακέραια συνάρτηση

$$\eta^*(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{\alpha_n} z^n \ .$$

Τώρα περιορίζουμε το q να είναι άρτιος φυσικός αριθμός ≥ 4.

Για πραγματικό $z = x$ έχουμε

$$|\eta(x)|^{q-2}\, \eta(x) = (\eta(x))^{\frac{q}{2}} (\eta^*(x))^{\frac{q}{2}-1}$$

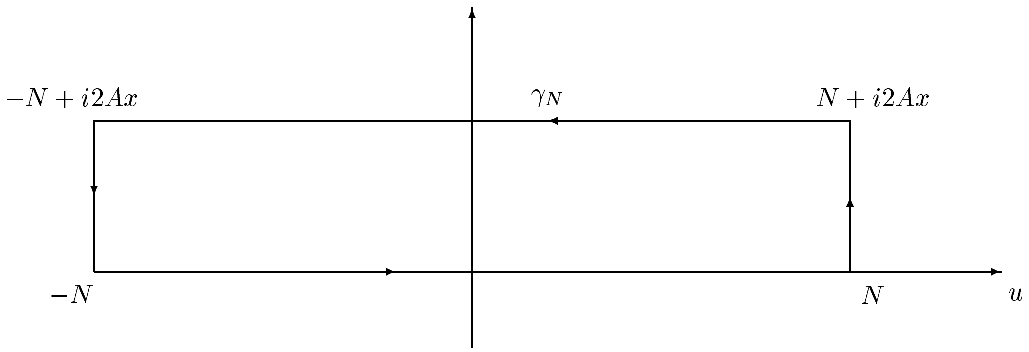
και επομένως η συνάρτηση $|\eta(x)|^{q-2}\, \eta(x)$ επεκτείνεται στο $\mathbb{C}$ σε ακέραια συνάρτηση και συγκεκριμένα στην $\eta(z)^{\frac{q}{2}} (\eta^*(z))^{\frac{q}{2}-1}$. Αυτό το γεγονός μαζί με κατάλληλη εκτίμηση της συνάρτησης στο ολοκλήρωμα της σχέσης (3.28) θα μας επιτρέψει να μεταφέρουμε την πραγματική ευθεία στο ολοκλήρωμα παράλληλα προς τον εαυτό της στο μιγαδικό επίπεδο. Η εκτίμηση που χρειάζεται είναι η εξής:

$$\begin{aligned} &\left| (\eta(x+iy))^{\frac{q}{2}} \, (\eta^*(x+iy))^{\frac{q}{2}-1} \right| = |\eta(x+iy)|^{\frac{q}{2}} \, |\eta^*(x+iy)|^{\frac{q}{2}-1} \\ &= |\eta(x+iy)|^{\frac{q}{2}} \, \left| \, \overline{\eta^*(x+iy)} \, \right|^{\frac{q}{2}-1} = |\eta(x+iy)|^{\frac{q}{2}} \, |\eta(x-iy)|^{\frac{q}{2}-1} \end{aligned}$$

και απο την (3.27)

$$\left| (\eta(x+iy))^{\frac{q}{2}} \, (\eta^*(x+iy))^{\frac{q}{2}-1} \right| \leq c_2^{q-1} \exp\left\{ (q-1)\tau A x^2 + (q-1) \left(\frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A \right) y^2 \right\} . \tag{3.29}$$

Σχηματίζουμε τώρα την καμπύλη γ_N όπως στο σχήμα



και απο το Θεώρημα του Cauchy συνεπάγεται ότι

$$\int_{\gamma_N} e^{-\frac{\tau}{4A}(z-i2Ax)^2} \, (\eta(z-2Ay))^{\frac{q}{2}} \, (\eta^*(z-2Ay))^{\frac{q}{2}-1} \, e^{i\tau v z} \, dz = 0 \ . \tag{3.30}$$

Είναι απλό να αποδείξουμε ότι καθώς $N \to +\infty$ τα ολοκληρώματα στις δύο κατακόρυφες πλευρές τείνουν στο μηδέν. Για παράδειγμα η δεξιά πλευρά δίνει εκτίμηση κατ'απόλυτη τιμή

$$\leq \int_0^1 \left| e^{-\frac{\tau}{4A}(N+i2Ax(t-1))^2} (\eta(N-2Ay+i2Axt))^{\frac{q}{2}} \, (\eta^*(N-2Ay+i2Axt))^{\frac{q}{2}-1} \, e^{i\tau v(N+i2Axt)} \right| dt$$

και βάσει της (3.29)

$$\leq c_2^{q-1} \int_0^1 \exp\Big\{ -\frac{\tau}{4A}\left[N^2 - 4A^2x^2(t-1)^2\right] + (q-1)\tau A(N-2Ay)^2 + \\ + (q-1)\left(\frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A\right) 4A^2x^2t^2 - 2\tau Avxt\Big\}\, dt$$

$$= c_3 \exp\left\{-\frac{\tau N^2}{4A} + (q-1)\tau A(N-2Ay)^2\right\}$$

όπου το c_3 δεν εξαρτάται απο το N

$$= c_3 \exp\Big\{-\Big(\frac{\tau}{4A} - (q-1)\tau A\Big) N^2 + c_4 N + c_5\Big\}$$

όπου τα c_4, c_5 δεν εξαρτώνται απο το N. Το τελευταίο τείνει στο 0 διότι $\frac{\tau}{4A} - (q-1)\tau A = \frac{\tau}{4A} - \frac{q}{p}\tau A = q\theta > 0$ λόγω της (3.21).

Ακριβώς οι ίδιες εκτιμήσεις (η μόνη αλλαγή είναι το $-N$ στη θέση του N) δίνουν ότι και το ολοκλήρωμα στην αριστερή πλευρά της γ_N τείνει στο μηδέν καθώς $N \to +\infty$. Άρα απο την (3.30) και την (3.28) έχουμε

$$\mu_t^q e^{-\tau A v^2} \xi(x+v+iy) =$$

$$= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} e^{2A\tau xv} \\ \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} \left(\eta(u+i2Ax-2Ay)\right)^{\frac{q}{2}} \left(\eta^*(u+i2Ax-2Ay)\right)^{\frac{q}{2}-1} e^{i\tau v(u+i2Ax)}\, du$$

$$= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} \left(\eta(u+i2A(x+iy))\right)^{\frac{q}{2}} \left(\eta^*(u+i2A(x+iy))\right)^{\frac{q}{2}-1} e^{i\tau vu}\, du\ .$$

Για απλούστευση θέτουμε $z = x + iy$ και πολλαπλασιάζουμε με $e^{-\theta v^2}$ οπότε με τις (3.21), (3.22) παίρνουμε

$$\mu_t^q e^{-A_1 v^2} \xi(v+z) = \\ = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{q}{p}A_1 u^2} \left(\eta(u+i2Az)\right)^{\frac{q}{2}} \left(\eta^*(u+i2Az)\right)^{\frac{q}{2}-1} \exp\left\{-\theta u^2 - \theta v^2 + i\tau uv\right\}\, du\ . \tag{3.31}$$

Ξεκινώντας τώρα απο τη σχέση (3.25) και ακολουθώντας τελείως ανάλογα βήματα αποδεικνύεται η «συμμετρική» σχέση

$$e^{-A_1 v^2} \eta(v+i2Az) = \\ = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{q}{p}A_1 u^2} \left(\xi(u+4A^2z)\right)^{\frac{q}{2}} \left(\xi^*(u+4A^2z)\right)^{\frac{q}{2}-1} \exp\left\{-\theta u^2 - \theta v^2 - i\tau uv\right\}\, du\ . \tag{3.32}$$

Η συνάρτηση ξ^* ορίζεται απο την ξ ακριβώς όπως ορίσθηκε η η^* απο την η.

Απο τη σχέση (3.31) μαζί με την (βλέπε σελίδα 31)

$$K\left(x,y,-it\right)=\sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}}\exp\left\{-\theta x^2-\theta y^2-i\tau xy\right\}\ .$$

καθώς και απο τον ορισμό του μ_t παίρνουμε

$$\mu_t^q\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-qA_1v^2}\left|\xi(v+z)\right|^q\ dv\right)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le\mu_t\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-qA_1u^2}\left|\eta(u+i2Az)\right|^{p\frac{q}{2}}\left|\eta^*(u+i2Az)\right|^{p\left(\frac{q}{2}-1\right)}\ du\right)^{\frac{1}{p}}$$

και εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder με εκθέτες $\frac{2}{p}$, $\frac{2}{2-p}$

$$\begin{aligned}&\mu_t^q\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-qA_1v^2}\left|\xi(v+z)\right|^q\ dv\right)^{\frac{1}{q}}\le\\&\le\mu_t\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-qA_1u^2}\left|\eta(u+i2Az)\right|^q\ du\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-qA_1u^2}\left|\eta(u-i2A\overline{z})\right|^q\ du\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{3.33}$$

Απο τη σχέση (3.32) με όμοιο τρόπο παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-qA_1v^2}\left|\eta(v+i2Az)\right|^q\ dv\right)^{\frac{1}{q}}\le\\&\le\mu_t\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-qA_1u^2}\left|\xi(u+4A^2z)\right|^q\ du\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-qA_1u^2}\left|\xi(u+4A^2\overline{z})\right|^q\ du\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Ορίζουμε

$$m(z)=\frac{1}{q}\log\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-qA_1v^2}\left|\xi(v+z)\right|^q\ dv\right)\ .\tag{3.35}$$

Τώρα στην (3.33) χρησιμοποιούμε δύο φορές την (3.34), μια φορά όπως είναι και την άλλη φορά αντικαθιστώντας το z με $-\overline{z}$. Το αποτέλεσμα μετά απο λίγες πράξεις είναι

$$\begin{aligned}m(z)\le&\frac{q^2}{4}m(4A^2z)+\frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)m(4A^2\overline{z})+\\&+\frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)m(-4A^2\overline{z})+q^2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)^2m(-4A^2z).\end{aligned}$$

Θέτοντας

$$\delta=4A^2\tag{3.36}$$

έχουμε

$$m(z)\le\frac{q^2}{p^2}\left\{\frac{p^2}{4}m(\delta z)+\frac{(2-p)p}{4}m(\delta\overline{z})+\frac{(2-p)p}{4}m(-\delta\overline{z})+\frac{(2-p)^2}{4}m(-\delta z)\right\}.$$

Την τελευταία σχέση γράφουμε στη μορφή

$$m(z) \leq \frac{q^2}{p^2}\left\{a_1 m(\delta z) + b_1 m(\delta \overline{z}) + c_1 m(-\delta \overline{z}) + d_1 m(-\delta z)\right\} \tag{3.37}$$

με $a_1 = \frac{p^2}{4}$, $b_1 = \frac{(2-p)p}{4}$, $c_1 = \frac{(2-p)p}{4}$, $d_1 = \frac{(2-p)^2}{4}$.

Υποθέτοντας ότι

$$m(z) \leq \frac{q^{2n}}{p^{2n}}\left\{a_n m(\delta^n z) + b_n m(\delta^n \overline{z}) + c_n m(-\delta^n \overline{z}) + d_n m(-\delta^n z)\right\} \tag{3.38}$$

και κατόπιν αντικαθιστώντας στην (3.37) το z διαδοχικά με $\delta^n z$, $\delta^n \overline{z}$, $-\delta^n \overline{z}$, $-\delta^n z$ και χρησιμοποιώντας την (3.38) συμπεραίνουμε ότι

$$m(z) \leq \frac{q^{2(n+1)}}{p^{2(n+1)}}\left\{a_{n+1} m(\delta^{n+1} z) + b_{n+1} m(\delta^{n+1} \overline{z}) + c_{n+1} m(-\delta^{n+1} \overline{z}) + d_{n+1} m(-\delta^{n+1} z)\right\}$$

με τους αναδρομικούς τύπους

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_1 a_n + b_1 b_n + c_1 c_n + d_1 d_n \\ b_{n+1} &= b_1 a_n + a_1 b_n + d_1 c_n + c_1 d_n \\ c_{n+1} &= c_1 a_n + d_1 b_n + a_1 c_n + b_1 d_n \\ d_{n+1} &= d_1 a_n + c_1 b_n + b_1 c_n + a_1 d_n \quad . \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι η (3.38) αληθεύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και απο τους αναδρομικούς τύπους έχουμε τέσσερα συμπεράσματα για τους a_n, b_n, c_n, d_n.

- $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} + d_{n+1} = (a_1 + b_1 + c_1 + d_1)(a_n + b_n + c_n + d_n)$ και επειδή $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 1$ συνεπάγεται ότι

$$a_n + b_n + c_n + d_n = 1 \quad \text{για κάθε } n. \tag{3.39}$$

- $b_{n+1} - c_{n+1} = (b_1 - c_1)(a_n - d_n) + (a_1 - d_1)(b_n - c_n)$ και επειδή $b_1 = c_1$ συνεπάγεται ότι

$$b_n = c_n \quad \text{για κάθε } n. \tag{3.40}$$

- $a_{n+1} - d_{n+1} = (a_1 - d_1)(a_n - d_n) + (b_1 - c_1)(b_n - c_n)$ απ'όπου μαζί με την (3.40) συνεπάγεται ότι

$$a_n - d_n = (a_1 - d_1)^n = \left(\frac{p}{q}\right)^n \quad \text{για κάθε } n. \tag{3.41}$$

- Για κάθε n έχουμε

$$a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n \geq 0 \quad . \tag{3.42}$$

Κατόπιν αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση $m(z) = m(x+iy)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη ως προς x και y. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-qA_1 v^2} \left|\xi(v+x+iy)\right|^q \, dv$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη ως προς x και y , λόγω της (3.35). Όμως $\left|\xi(v+x+iy)\right|^q =$

$\left[\ \xi(v+x+iy)\overline{\xi(v+x+iy)}\ \right]^{\frac{q}{2}}$ και επειδή η $\xi(v+z)$ είναι ακέραια συνάρτηση του z και ο $\frac{q}{2}$ είναι φυσικός αριθμός συνεπάγεται ότι για κάθε v η $|\xi(v+x+iy)|^q$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη ως προς x και y. Άρα για να μπορέσουμε να περάσουμε παραγώγους μέσα στο ολοκλήρωμα αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-qA_1v^2} \left|\xi^{(n)}(v+x+iy)\right|^q \ dv < +\infty \ . \tag{3.43}$$

Απο τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy έχουμε

$$\begin{aligned} \left|\xi^{(n)}(v+z)\right| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-v-z|=1} \frac{\xi(\zeta)}{(\zeta-v-z)^{n+1}}\ d\zeta\right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi}\int_{|\zeta-v-z|=1} |\xi(\zeta)|\ |d\zeta| \end{aligned}$$

και απο την (3.26)

$$\left|\xi^{(n)}(v+z)\right| \leq c_1 n! \exp\left\{\tau A(1+|v+z|)^2 + \left(\frac{\tau^2}{4\theta}-\tau A\right)(1+|z|)^2\right\} \ .$$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-qA_1v^2} \left|\xi^{(n)}(v+x+iy)\right|^q dv \leq c_1 n! \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-q(A_1-\tau A)v^2 + c_2 v + c_3\right\} dv$$

όπου τα $c_2,\ c_3$ δεν εξαρτώνται απο το v. Επειδή $A_1 - \tau A = \theta > 0$ συνεπάγεται η (3.43). Άρα η $m(z)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη ως προς x και y.

Επίσης

$$\begin{aligned} m(0) &= \frac{1}{q}\log\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-qA_1v^2}\,|\xi(v)|^q \ dv = \frac{1}{q}\log\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(v)|^q \ dv \\ &= \frac{1}{q}\log\int_{-\infty}^{+\infty} |f(v)|^{(p-1)q} \ dv = \frac{1}{q}\log\|f\|_p^p = 0 \ . \end{aligned}$$

Άρα υπάρχουν $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, συνάρτηση $k(x,y)$ και $M > 0$ ώστε

$$\begin{aligned} &m(z) = m(x+iy) = \alpha x + \beta y + |z|^2\, k(x,y) \quad , \\ &|k(x,y)| \leq M \quad \text{όταν} \quad x^2+y^2 \leq 1 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Άρα η σχέση (3.38) γίνεται

$$\begin{aligned} m(z) \ \leq\ & \frac{q^{2n}}{p^{2n}}\Big\{\alpha\delta^n(a_n+b_n-c_n-d_n)x + \beta\delta^n(a_n-b_n+c_n-d_n)y + \\ & + \delta^{2n}|z|^2\left(a_n k(\delta^n z) + b_n k(\delta^n \overline{z}) + c_n k(-\delta^n\overline{z}) + d_n k(-\delta^n z)\right)\Big\} \ . \end{aligned} \tag{3.45}$$

Απο την (3.21) παίρνουμε

$$A = -\frac{p\,\theta}{2\tau} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^2\theta^2}{\tau^2}+\frac{p}{q}} < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{q}}$$

και επομένως, μαζί με την (3.36)

$$\delta = 4A^2 < \frac{p}{q} < 1 \tag{3.46}$$

Άρα, τουλάχιστον για μεγάλα n, ισχύει ότι $|\delta^n z| < 1$ και επομένως, βάσει των (3.44), (3.39), (3.40), (3.41), (3.42) η (3.45) γίνεται

$$m(z) \leq \frac{q^{2n}}{p^{2n}} \left\{ \alpha\delta^n \left(\frac{p}{q}\right)^n x + \beta\delta^n \left(\frac{p}{q}\right)^n y + M\delta^{2n} |z|^2 \right\} .$$

Άρα, βάσει της (3.46), συνεπάγεται όταν $n \to +\infty$ ότι $m(z) \leq 0$.

Απο τον ορισμό (3.35) της $m(z)$ είναι φανερό ότι το Λήμμα 3.2.2 αποδείχθηκε. □

Λήμμα 3.2.3 *Η συνάρτηση $\xi(z)$ είναι σταθερή.*

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε τυχόν $h \geq 0$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\xi_1(z) = \int_0^h e^{-A_1 v^2} \xi(v+z)\, dv .$$

Είναι φανερό ότι η $\xi_1(z)$ είναι ακέραια συνάρτηση και

$$|\xi_1(z)| \leq h^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^h e^{-qA_1 v^2} |\xi(v+z)|^q \, dv \right)^{\frac{1}{q}} \leq h^{\frac{1}{p}}$$

σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.2. Απο το Θεώρημα του Liouville συνεπάγεται ότι η ξ_1 είναι σταθερή και επομένως

$$\int_0^h e^{-A_1 v^2} \xi(v+z)\, dv = \int_0^h e^{-A_1 v^2} \xi(v)\, dv .$$

Παραγωγίζοντας ως προς h στο $h = 0$ παίρνουμε $\xi(z) = \xi(0)$. □

Απο τους ορισμούς των $\xi(x)$, $\phi(x)$ συνεπάγεται αμέσως ότι υπάρχει σταθερά $c \neq 0$ ώστε

$$f(x) = c\, e^{-\frac{q}{p} A_1 x^2} .$$

και επειδή $\|f\|_p = 1$ συνεπάγεται ότι $|c| = \left(\frac{qA_1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2p}}$.

Απο την (3.13) και τις (3.21), (3.22) έχουμε

$$\widehat{g}(x) = c\sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\theta x^2 - \left(\theta + \frac{q}{p}A_1\right) y^2 - i\tau xy \right\} dy = c\sqrt{\frac{2A}{t}} e^{-A_1 x^2} .$$

και επομένως, μετά απο πράξεις

$$\mu_t = \|\widehat{g}\|_q = \sqrt{\frac{2A}{t}} \left(\frac{qA_1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}} .$$

Άρα έχουμε αποδείξει το

Λήμμα 3.2.4 *Η σταθερά του Λήμματος 3.1.1 είναι*

$$\mu_t = \sqrt{\frac{2A}{t}} \left(\frac{qA_1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}}$$

όταν $p = \frac{q}{q-1}$ *και* q *είναι άρτιος ακέραιος* ≥ 4.

Όταν $t \to 1^-$ βλέπουμε απο τις σχέσεις (3.21), (3.22) ότι

$$A,\ A_1 \longrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{q}}$$

και επομένως

$$\mu_t \longrightarrow \mu = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{q}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sqrt{\frac{p}{2\pi}}\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Έτσι φτάνουμε στο τελικό αποτέλεσμα της εργασίας του Babenko

Θεώρημα 3.2.1 (K.I. Babenko) *Έστω* $p = \frac{q}{q-1}$ *και* q *είναι άρτιος ακέραιος* ≥ 4. *Τότε για κάθε* $f \in L^p(\mathbb{R})$

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leq \mu \|f\|_p$$

όπου $\mu = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{q}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sqrt{\frac{p}{2\pi}}\right)^{\frac{1}{p}}$.

Απόδειξη: Απο τις σχέσεις (2.12), (2.14) είναι εύκολο να δούμε ότι, τουλάχιστον για $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ισχύει

$$K_{-it}f = \widehat{K_t(f)} = K_t(\widehat{f}) .$$

Άρα η (3.3) συνεπάγεται ότι

$$\|K_t(\widehat{f})\|_q \leq \mu_t \|f\|_p \quad , \ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

οπότε αφήνοντας το t να τείνει στο 1^- και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.1.2(α) παίρνουμε

$$\|\widehat{f}\|_q \leq \mu \|f\|_p \quad , \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) .$$

Τώρα φαίνεται αμέσως ότι ο μετασχηματισμός Fourier επεκτείνεται σε

$$\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^q(\mathbb{R})$$

και

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leq \mu \|f\|_p \quad , \ f \in L^p(\mathbb{R}) .$$

□

Παρατηρούμε ότι πουθενά στην απόδειξη δε χρησιμοποιήσαμε ότι ο $\mathcal{F}$ είναι ήδη ορισμένος στο χώρο $L^p(\mathbb{R})$ ούτε την ανισότητα Hausdorff-Young.

Παρατήρηση: Το ότι ο q είναι άρτιος ακέραιος ≥ 4 χρειάζεται ώστε οι συναρτήσεις $(\eta(z))^{\frac{q}{2}} (\eta^*(z))^{\frac{q}{2}-1}$, $(\xi(z))^{\frac{q}{2}} (\xi^*(z))^{\frac{q}{2}-1}$ να είναι ακέραιες, αλλά και ώστε η $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-qA_1 v^2} |\xi(v + x + iy|^q \ dv$ να είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς x, y για να ισχύει η (3.44). Με λίγη περισσότερη δουλειά μπορεί να αποδείξει κανείς (σχετικά εύκολα) ότι, επειδή για την (3.44) χρειάζονται συνεχείς μερικές παράγωγοι τάξης μέχρι και 2, ο μόνος περιορισμός για να ισχύει η (3.44) είναι : $q \geq 2$ (χωρίς να χρειάζεται το q να είναι ακέραιος).

Κεφάλαιο 4

Η εργασία του W. Beckner

4.1 Αναγωγή του προβλήματος στο χώρο του Gauss $(\mathbb{R}, \mu)$

Η εργασία του W. Beckner πάνω στην ανισότητα Hausdorff-Young έχει έντονη πιθανοθεωρητική χροιά. Ουσιαστικό ρόλο παίζει το μέτρο του Gauss στον $\mathbb{R}$

$$d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2} dx \ .$$

Εισάγουμε κάποιες παραλλαγές του πυρήνα του Mehler καθώς και των πολυωνύμων Hermite και εργαζόμαστε στους χώρους $L^p(\mathbb{R}, \mu)$.

Ορισμός 4.1.1 *Ορίζουμε*

$$T(x,y,t) = \sqrt{\pi} K(x,y,t) e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp\left\{ -\frac{t^2}{1-t^2}x^2 - \frac{t^2}{1-t^2}y^2 + \frac{2t}{1-t^2}xy \right\} \quad (4.1)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{C}$, $|t| < 1$.

Ορισμός 4.1.2

$$\mathbf{H}_n(x) = \frac{1}{(2^n n!)^{\frac{1}{2}}} H_n(x) = \pi^{\frac{1}{4}} \psi_n(x) e^{\frac{1}{2}x^2} \ , \qquad x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}_o \ . \qquad (4.2)$$

Λήμμα 4.1.1

(α) $T(x,y,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbf{H}_n(x) \mathbf{H}_n(y)$.

(β) Τα πολυώνυμα $\mathbf{H}_n(x)$ *του ορισμού 4.1.2 αποτελούν ορθοκανονική βάση του* $L^2(\mathbb{R}, \mu)$.

(γ) Για κάθε $\alpha > 0$ *οι συναρτήσεις* $p(x)e^{-\alpha x^2}$, *όπου* $p(x)$ *είναι οποιοδήποτε πολυώνυμο, είναι πυκνές στον* $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < +\infty$.

(δ) Τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον $L^p(\mathbb{R}, \mu)$, $1 \le p < +\infty$.

Απόδειξη: **(α)** Βάσει των (2.5), (4.1), (4.2) έχουμε

$$\begin{aligned} T(x,y,t) &= \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\psi_n(x)e^{\frac{1}{2}x^2}\psi_n(y)e^{\frac{1}{2}y^2} = \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}t^nH_n(x)H_n(y) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n\mathbf{H}_n(x)\mathbf{H}_n(y) \ . \end{aligned}$$

(β) Αυτό αποτελεί άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.1.3:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{H}_n(x)\mathbf{H}_m(x)\ d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\psi_m(x)\ dx = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = m \\ 0, & \text{αν } n \neq m \ . \end{cases}$$

Άρα το $\{\mathbf{H}_n(x)\}$ αποτελεί ορθοκανονικό σύνολο.

Έστω $f \in L^2(\mathbb{R},\mu)$ με $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{H}_n(x)f(x)\ d\mu(x) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_o$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Προφανώς $g \in L^2(\mathbb{R})$ και

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)g(x)\ dx = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{H}_n(x)f(x)\ d\mu(x) = 0 \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N}_o \ .$$

Άρα $g = 0$ και επομένως $f = 0$.

Άρα το $\{\mathbf{H}_n\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{R},\mu)$.

(γ) Έστω $f \in L^q(\mathbb{R})$, $q = \frac{p}{p-1}$, με $\int_{\mathbb{R}} f(x)p(x)e^{-\alpha x^2}\ dx = 0$ για κάθε πολυώνυμο $p(x)$.

Θεωρούμε $\xi \in \mathbb{R}$ και γράφουμε

$$e^{-ix\xi} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-i\xi)^n x^n}{n!} \ .$$

Επειδή τα μερικά αθροίσματα της σειράς είναι ομοιόμορφα φραγμένα απο τη συνάρτηση $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|\xi x|^n}{n!} = e^{|\xi x|}$, και, επειδή $f(x)e^{|\xi x|}e^{-\alpha x^2} \in L^1(\mathbb{R})$, συνεπάγεται απο το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης ότι

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\alpha x^2}e^{-ix\xi}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-i\xi)^n}{n!}\int_{\mathbb{R}} f(x)x^ne^{-\alpha x^2}\ dx = 0 \ .$$

Άρα $\mathcal{F}\left(f(x)e^{-\alpha x^2}\right) = 0$ και επομένως $f = 0$.

(δ) Αυτό είναι συνέπεια του (γ).

Έστω $f \in L^q(\mathbb{R},\mu)$, $q = \frac{p}{p-1}$, με $\int_{\mathbb{R}} f(x)p(x)\ d\mu(x) = 0$ για κάθε πολυώνυμο $p(x)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-\frac{1}{q}x^2}$ και έχουμε:

$$(i) \qquad \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^q\ dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^q\, e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^q\ d\mu(x) < +\infty \ , \text{ και}$$

$$(ii) \qquad \int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)e^{-\frac{1}{p}x^2}\ dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)p(x)e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)p(x)\ d\mu(x) = 0$$

για κάθε πολυώνυμο $p(x)$.

Απο το (γ) συνεπάγεται ότι $g = 0$ και επομένως $f = 0$. □

Ορισμός 4.1.3 *Ορίζουμε*

$$T_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} T(x,y,t) f(y)\, d\mu(y) \ .$$

Λήμμα 4.1.2 *Ο T_t είναι φραγμένος γραμμικός μετασχηματισμός*

$$T_t : L^2(\mathbb{R},\mu) \to L^2(\mathbb{R},\mu)$$

και

$$T_t \mathbf{H}_n = t^n \mathbf{H}_n \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Απόδειξη: Έστω $f \in L^2(\mathbb{R},\mu)$. Τότε $g(x) = f(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} \in L^2(\mathbb{R})$ και επομένως

$$T_t f(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} = \int_{\mathbb{R}} K(x,y,t) e^{\frac{1}{2}y^2} g(y) e^{\frac{1}{2}y^2} e^{-y^2}\, dy = K_t g(x) \in L^2(\mathbb{R})$$

σύμφωνα με το Λήμμα 2.1.5.

Άρα $T_t f \in L^2(\mathbb{R},\mu)$.

Επίσης

$$\|T_t f\|_{L^2(\mathbb{R},\mu)} = \pi^{-\frac{1}{4}} \|K_t g\|_{L^2(\mathbb{R})} \le c\pi^{-\frac{1}{4}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} = c\|f\|_{L^2(\mathbb{R},\mu)} \ .$$

Απο τις (4.2) και (2.12) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} T_t \mathbf{H}_n(x) &= \pi^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} K(x,y,t) e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \psi_n(y) e^{\frac{1}{2}y^2} e^{-y^2}\, dy \\ &= \pi^{\frac{1}{4}} K_t \psi_n(x) e^{\frac{1}{2}x^2} = t^n \pi^{\frac{1}{4}} \psi_n(x) e^{\frac{1}{2}x^2} = t^n \mathbf{H}_n(x) \ . \end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.1.3 *Έστω $1 < p < 2$ και $q = \frac{p}{p-1}$. Θέτουμε*

$$\mu = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{q}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sqrt{\frac{p}{2\pi}}\right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad t = i\sqrt{p-1} \ .$$

Τα παρακάτω (i), (ii) είναι ισοδύναμα.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \|\mathcal{F}f\|_q \le \mu \|f\|_p \quad , \quad f \in L^p(\mathbb{R}) \ . \\ \text{(ii)} & \|T_t g\|_{L^q(\mathbb{R},\mu)} \le \|g\|_{L^p(\mathbb{R},\mu)} \quad , \quad g \in L^p(\mathbb{R},\mu) \ . \end{array} \tag{4.3}$$

Απόδειξη: Με απλό υπολογισμό βλέπουμε ότι

$$T\left(x,y,i\sqrt{p-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{p}} \exp\left\{ \frac{1}{q}x^2 + \frac{1}{q}y^2 + i\frac{2}{\sqrt{pq}}xy \right\} \ . \tag{4.4}$$

(α) Έστω ότι ισχύει η (ii).

Θεωρούμε $f(x) = p(x)e^{-\frac{1}{p}x^2}$ όπου $p(x)$ τυχόν πολυώνυμο και τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x)e^{\frac{1}{p}x^2} = p(x) \in L^p(\mathbb{R},\mu) \ .$$

Τότε

$$\mathcal{F}f\left(-\frac{2}{\sqrt{pq}}\xi\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{i\frac{2}{\sqrt{pq}}x\xi}\ dx$$

όπου το ολοκλήρωμα είναι καλά ορισμένο αφού $f\in L^1(\mathbb{R})$.

Άρα

$$\mathcal{F}f\left(-\frac{2}{\sqrt{pq}}\xi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}}g(x)e^{i\frac{2}{\sqrt{pq}}x\xi}e^{-\frac{1}{p}x^2}e^{x^2}\ d\mu(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}}g(x)e^{\frac{1}{q}x^2}e^{i\frac{2}{\sqrt{pq}}x\xi}\ d\mu(x)\ .$$

Βάσει της (4.4):

$$\mathcal{F}f\left(-\frac{2}{\sqrt{pq}}\xi\right)e^{\frac{1}{q}\xi^2}=\sqrt{\frac{p}{2}}\int_{\mathbb{R}}T(x,\xi,i\sqrt{p-1})g(x)\ d\mu(x)=\sqrt{\frac{p}{2}}T_tg(\xi)\ .$$

Άρα

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}f\|_q^q &= \int_{\mathbb{R}}|\mathcal{F}f(\xi)|^q\ d\xi=\frac{2}{\sqrt{pq}}\int_{\mathbb{R}}\left|\sqrt{\frac{p}{2}}T_tg(\xi)\right|^q e^{-\xi^2}\ d\xi=2\sqrt{\frac{\pi}{pq}}\left(\sqrt{\frac{p}{2}}\right)^q\|T_tg\|^q_{L^q(\mathbb{R},\mu)}\\ &\le 2\sqrt{\frac{\pi}{pq}}\left(\sqrt{\frac{p}{2}}\right)^q\|g\|^q_{L^p(\mathbb{R},\mu)}=2\sqrt{\frac{\pi}{pq}}\left(\sqrt{\frac{p}{2}}\right)^q\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p e^{x^2}\ d\mu(x)\right)^{\frac{q}{p}}\\ &= \mu^q\|f\|_p^q\ .\end{aligned}$$

Άρα η (i) ισχύει για ένα πυκνό υποσύνολο του $L^p(\mathbb{R})$ (σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.1(γ)) και επομένως ισχύει για κάθε $f\in L^p(\mathbb{R})$.

(β) Η απόδειξη του αντίστροφου είναι παρόμοια. □

Άρα η εργασία του Beckner συνίσταται απο εδώ και πέρα στο να αποδείξει την ανισότητα (4.3) για συγκεκριμένη τιμή του t: $t=i\sqrt{p-1}$. Βάσει του Λήμματος 4.1.1(δ) αρκεί να αποδειχθεί η (4.3) για $g(x)=p(x)$ όταν $p(x)$ είναι τυχόν πολυώνυμο.

4.2 Αναγωγή του προβλήματος σε διακριτό χώρο

Θεωρούμε μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli, δηλαδή

$$\nu=\frac{1}{2}\delta_1+\frac{1}{2}\delta_{-1} \tag{4.5}$$

όπου δ_1, δ_{-1} είναι δύο μάζες-Dirac στα σημεία 1, -1 αντίστοιχα. Ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας $\nu^{(n)}$ βάσει της

$$\nu^{(n)}(E)=\nu(\sqrt{2n}E)\quad,\quad E\ \ Borel\subseteq\mathbb{R}\ . \tag{4.6}$$

Τέλος θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας

$$\nu_n=\nu^{(n)}*\nu^{(n)}*\cdots*\nu^{(n)}\ ,$$

τη συνέλιξη του $\nu^{(n)}$ με τον εαυτό του n φορές. Αυτό ισοδυναμεί με

$$\int_{\mathbb{R}}f(x)\ d\nu_n(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x_1+\cdots+x_n)\ d\nu^{(n)}(x_1)\cdots d\nu^{(n)}(x_n) \tag{4.7}$$

για κάθε $f \in C(\mathbb{R})$.

Λόγω των (4.5), (4.6):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\nu_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{\sqrt{2n}}\right)\ d\nu(x_1)\cdots d\nu(x_n) \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{\epsilon} f\left(\frac{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_n}{\sqrt{2n}}\right) \qquad (4.8)\end{aligned}$$

όπου το $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ διατρέχει όλες τις n-άδες προσήμων, δηλαδή το ϵ διατρέχει το σύνολο $\{-1,+1\}^n$ με πληθάριθμο 2^n .

Χρήσιμη θα είναι η παρακάτω ειδική περίπτωση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος.

Λήμμα 4.2.1 *Έστω f οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με το-πολύ-πολυωνυμική αύξηση στο άπειρο. Δηλαδή για κάποιο $C > 0$ και $k \in \mathbb{N}_o$*

$$|f(x)| \le C(1+x^2)^k \quad , \ x \in \mathbb{R}\ .$$

Τότε

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\nu_n(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\mu(x) \quad , \quad n \to +\infty\ .$$

Απόδειξη:

Βήμα 1: Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Τότε απο την (1.3) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\ d\xi\right)\ d\nu_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\ d\nu_n(x)\right)\ d\xi$$

οπότε βάσει της (4.8)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\nu_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)\frac{1}{2^n}\sum_{\epsilon} e^{i\frac{\xi}{\sqrt{2n}}\epsilon_1}\cdots e^{i\frac{\xi}{\sqrt{2n}}\epsilon_n}\ d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)\frac{1}{2^n}\left(e^{-i\frac{\xi}{\sqrt{2n}}} + e^{i\frac{\xi}{\sqrt{2n}}}\right)^n\ d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)\left(\cos\frac{\xi}{\sqrt{2n}}\right)^n\ d\xi\ .\end{aligned}$$

Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ $\quad \left(\cos\frac{\xi}{\sqrt{2n}}\right)^n = \left(1 - \frac{\xi^2}{4n} + O\left(\frac{\xi^4}{n^2}\right)\right)^n \longrightarrow e^{-\frac{\xi^2}{4}} \quad , \ n \to +\infty$, και, επειδή $\left|\widehat{f}(\xi)\left(\cos\frac{\xi}{\sqrt{2n}}\right)^n\right| \le \left|\widehat{f}(\xi)\right| \in L^1(\mathbb{R})$,απο το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\nu_n(x) &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{4}}\ d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\ dx\ e^{-\frac{\xi^2}{4}}\ d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}e^{-ix\xi}\ d\xi\ dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2}\ dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\mu(x)\ .\end{aligned}$$

Βήμα 2: Αποδεικνύουμε ότι οι ροπές των ν_n είναι ομοιόμορφα φραγμένες.

Για τις ροπές άρτιας τάξης έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |x|^{2k}\ d\nu_n(x) &= \int_{\mathbb{R}} x^{2k}\ d\nu_n(x) = \int_{\mathbb{R}} (-1)^k \frac{d^{2k}}{d\xi^{2k}} \left(e^{-ix\xi}\right)\Big|_{\xi=0} d\nu_n(x) \\ &= (-1)^k \frac{d^{2k}}{d\xi^{2k}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\ d\nu_n(x)\right)_{\xi=0} = (-1)^k \frac{d^{2k}}{d\xi^{2k}} \left(\cos\frac{\xi}{\sqrt{2n}}\right)^n_{\xi=0} .\end{aligned}$$

Σ'αυτό το σημείο εφαρμόζουμε τον τύπο του Cauchy για τις παραγώγους της αναλυτικής συνάρτησης $\left(\cos\frac{z}{\sqrt{2n}}\right)^n$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |x|^{2k}\ d\nu_n(x) &= (-1)^k \frac{(2k)!}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left(\cos\frac{z}{\sqrt{2n}}\right)^n \frac{dz}{z^{2k+1}} \le (2k)! \max_{|z|=1} \left|\cos\frac{z}{\sqrt{2n}}\right|^n \\ &= (2k)! \max_{|z|=1} \exp\left\{n \log\left|\cos\frac{z}{\sqrt{2n}}\right|\right\} \\ &= (2k)! \max_{|z|=1} \exp\left\{n \log\left|1 - \frac{z^2}{4n} + O\left(\frac{z^4}{n^2}\right)\right|\right\} = C_k < +\infty\end{aligned}$$

όπου το C_k δεν εξαρτάται απο το n.

Για τις ροπές περιττής τάξης έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |x|^{2k-1}\ d\nu_n(x) &= \int_{|x|<1} |x|^{2k-1}\ d\nu_n(x) + \int_{|x|\ge 1} |x|^{2k-1}\ d\nu_n(x) \\ &\le \int_{|x|<1} d\nu_n(x) + \int_{|x|\ge 1} |x|^{2k}\ d\nu_n(x) \le 1 + C_k .\end{aligned}$$

Βήμα 3: Έστω $f \in C(\mathbb{R})$ με $|f(x)| \le C(1+x^2)^k$ για κάποια $C > 0,\ k \in \mathbb{N}_o$.

Η συνάρτηση $\frac{f(x)}{(1+x^2)^{k+1}}$ είναι στον $C_o(\mathbb{R})$ και επομένως για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ώστε $\left|g(x) - \frac{f(x)}{(1+x^2)^{k+1}}\right| \le \epsilon$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τώρα η συνάρτηση $h(x) = (1+x^2)^{k+1} g(x)$ είναι στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ και

$$|h(x) - f(x)| \le \epsilon(1+x^2)^{k+1} \quad , \ x \in \mathbb{R} .$$

Άρα

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\nu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\mu(x)\right| &\le \int_{\mathbb{R}} |f(x) - h(x)|\ d\nu_n(x) + \left|\int_{\mathbb{R}} h(x)\ d\nu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)\ d\mu(x)\right| \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} |f(x) - h(x)|\ d\mu(x) \\ &\le \epsilon \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)^{k+1}\ d\nu_n(x) + \left|\int_{\mathbb{R}} h(x)\ d\nu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)\ d\mu(x)\right| \\ &\quad + \epsilon \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)^{k+1}\ d\mu(x) \\ &\le 2\epsilon C_k + \left|\int_{\mathbb{R}} h(x)\ d\nu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)\ d\mu(x)\right|\end{aligned}$$

απο το Βήμα 2 (με διαφορετική σταθερά C_k). Άρα

$$\limsup_{n\to+\infty}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\nu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\mu(x)\right| \leq 2\epsilon C_k$$

απο το Βήμα 1 και επομένως

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\nu_n(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\mu(x)\ .$$

□

Ορισμός 4.2.1 *Ορίζουμε το χώρο*

$$E_n = \left\{ \left(\frac{\epsilon_1}{\sqrt{2n}}, \cdots, \frac{\epsilon_n}{\sqrt{2n}} \right) \ \middle|\ \epsilon_j = \pm 1,\ 1 \leq j \leq n \right\}$$

και το μέτρο πιθανότητας $\mu_n = \nu^{(n)} \times \cdots \times \nu^{(n)}$ · *δηλαδή*

$$d\mu_n(x) = d\nu(\sqrt{2n}x_1)\cdots d\nu(\sqrt{2n}x_n) \quad ,\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

το οποίο έχει φορέα ακριβώς το σύνολο E_n .

Η σχέση (4.7) γράφεται

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\nu_n(x) = \int_{E_n} f(x_1 + \cdots + x_n)\ d\mu_n(x) \tag{4.9}$$

για κάθε συνεχή συνάρτηση f. Επειδή ο E_n είναι διακριτός χώρος και το μέτρο ν_n είναι διακριτό, η υπόθεση της συνέχειας για την f δε χρειάζεται.

Το μέτρο μ_n είναι διακριτό μέτρο και θέτει μάζα $\frac{1}{2^n}$ σε καθένα απο τα 2^n σημεία του E_n. Όλοι οι χώροι $L^p(E_n, \mu_n)$ ταυτίζονται και τα στοιχεία τους είναι όλες οι συναρτήσεις $g : E_n \longrightarrow \mathbb{C}$. Επειδή η συνάρτηση $f(x_1 + \cdots + x_n)$ είναι **συμμετρική**, δηλαδή αναλλοίωτη ως προς όλες τις αναδιατάξεις των $x_1, \ldots, x_n$, δίνουμε τον ορισμό

Ορισμός 4.2.2

$$\mathbf{X}_n = \{\ h : E_n \longrightarrow \mathbb{C}\ \mid\ \textit{η } h \textit{ είναι συμμετρική}\ \}$$

Επομένως $\mathbf{X}_n \subseteq L^p(E_n, \mu_n)$ για κάθε $p \quad , 1 \leq p \leq +\infty$.

Ο σκοπός τώρα είναι να ορισθεί κατάλληλος τελεστής στο χώρο $\mathbf{X}_n$, «ανάλογος» του τελεστή $T_t : L^p(\mathbb{R}, \mu) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}, \mu)$ και να υπολογισθεί η νόρμα του ώστε, περνώντας στο όριο καθώς $n \to +\infty$ με βάση το Λήμμα 4.2.1, να υπολογισθεί η νόρμα του T_t. Η ιδέα είναι να περιγραφεί μια ορθοκανονική βάση στο χώρο $\mathbf{X}_n \subseteq L^2(E_n, \mu_n)$ η οποία θα παίξει τον ίδιο ρόλο που παίζει η $\{\mathbf{H}_n\}$ στο χώρο $L^2(\mathbb{R}, \mu)$.

Λήμμα 4.2.2

(a) Κάθε συνάρτηση $f : E_n \longrightarrow \mathbb{C}$ *γράφεται με μοναδικό τρόπο σαν πολυώνυμο του* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *όπου κάθε* x_i *εμφανίζεται με βαθμό* ≤ 1*:*

$$f(x) = \sum_{\alpha} c_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad ,\ x = (x_1, \ldots x_n) \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{2n}}, -\frac{1}{\sqrt{2n}} \right\}^n$$

όπου $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$.

(β) Κάθε συμμετρική $h : E_n \longrightarrow \mathbb{C}$, δηλαδή κάθε $h \in \mathbf{X}_n$, γράφεται με μοναδικό τρόπο σαν

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \ \sigma_k(x_1, \ldots x_n) \ ,$$

όπου $\sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$ $(0 \leq k \leq n)$ είναι οι στοιχειώδεις συμμετρικές συναρτήσεις των $x_1, \ldots, x_n$:

$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq m_1 < \cdots < m_k \leq n} x_{m_1} \cdots x_{m_k} \ .$$

(γ) Οι $\sigma_k(x_1, \ldots, x_k)$, $0 \leq k \leq n$, αποτελούν ορθογώνια βάση του χώρου $\mathbf{X}_n \subseteq L^2(E_n, \mu_n)$.

Απόδειξη:

(α) Αν g είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής και η μεταβλητή αυτή παίρνει δύο τιμές $\pm\frac{1}{\sqrt{2n}}$,τότε είναι εύκολο να δούμε ότι: $g(x) = ax + b$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2n}}$, για κατάλληλα $a,\ b \in \mathbb{C}$. Αν τώρα η f εξαρτάται απο k μεταβλητές $x_1, \ldots, x_k$ που παίρνουν δύο τιμές $\pm\frac{1}{\sqrt{2n}}$ η καθεμία, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο, έχουμε ότι $f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k) = g(x_1, \ldots, x_{k-1}) + h(x_1, \ldots, x_{k-1})x_k$ για κατάλληλες συναρτήσεις $g,\ h$ $k-1$ μεταβλητών. Τώρα είναι προφανές πως με επαγωγή αποδεικνύεται το (α).

Η μοναδικότητα των συντελεστών στην παράσταση

$$f(x) = \sum_{\alpha} c_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

προκύπτει απο τον παρακάτω υπολογισμό όπου το $x = (x_1, \ldots, x_n)$ διατρέχει το $\left\{-\frac{1}{\sqrt{2n}}, \frac{1}{\sqrt{2n}}\right\}^n$ και το β είναι σταθερό $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \{0,1\}^n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n}\sum_x f(x_1, \ldots, x_n) x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} &= \frac{1}{2^n}\sum_x \left(\sum_\alpha c_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}\right) x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_\alpha c_\alpha \sum_x x_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdots x_n^{\alpha_n+\beta_n} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_\alpha c_\alpha \prod_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^{\alpha_j+\beta_j} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^{\alpha_j+\beta_j}\right\} \\ &= \left(\frac{1}{2n}\right)^{\beta_1+\cdots+\beta_n} c_\beta \ . \end{aligned}$$

(β) Έστω ότι $h(x) = \sum_\alpha c_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ είναι συμμετρική. Αν θεωρήσουμε οποιουσδήποτε $m_1, \ldots, m_k$ με $1 \leq m_1 < \cdots < m_k \leq n$ και οποιαδήποτε αναδιάταξη η οποία απεικονίζει: $1 \mapsto m_1, \ldots k \mapsto m_k$, τότε ο όρος $x_1, \ldots, x_k$ στην αναπαράσταση της $h(x)$ θα μετατραπεί σε $x_{m_1}, \ldots, x_{m_k}$. Άρα ο συντελεστής του οποιουδήποτε $x_{m_1} \ldots x_{m_k}$ στην αναπαράσταση της $h(x)$ ταυτίζεται με το συντελεστή του $x_1 \ldots x_k$. Επομένως

$$h(x) = \sum_{k=o}^{n} c_k \sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$$

για κατάλληλα $c_o, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$.

(γ) Είναι γνωστός ο τύπος

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i t) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k(x_1,\ldots,x_n)t^k \quad , \; t \in \mathbb{C} \; .$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_{E_n} \prod_{i=1}^{n}(1+x_i t)\prod_{i=1}^{n}(1+x_i s)\; d\mu_n(x) = \\ = \int_{E_n} \sum_{k=0}^{n} \sigma_k(x_1,\ldots,x_n)t^k \sum_{\lambda=0}^{n} \sigma_\lambda(x_1,\ldots,x_n)s^\lambda \; d\mu_n(x) \; . \end{aligned} \tag{4.10}$$

Επειδή το μ_n είναι μέτρο-γινόμενο, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{E_n} \prod_{i=1}^{n}(1+x_i t)\prod_{i=1}^{n}(1+x_i s)\; d\mu_n(x) &= \prod_{i=1}^{n} \int_{\left\{-\frac{1}{\sqrt{2n}},\frac{1}{\sqrt{2n}}\right\}} (1+x_i t)(1+x_i s)\; d\nu(\sqrt{2n}x_i) \\ &= \frac{1}{2^n}\left[\left(1+\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)\left(1+\frac{s}{\sqrt{2n}}\right)+\left(1-\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)\left(1-\frac{s}{\sqrt{2n}}\right)\right]^n \qquad (4.11) \\ &= \left(1+\frac{ts}{2n}\right)^n = \sum_{\mu=0}^{n}\binom{n}{\mu}\frac{1}{(2n)^\mu}t^\mu s^\mu \; . \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \int_{E_n} \sum_{k=0}^{n} \sigma_k(x_1,\ldots,x_n)t^k \sum_{\lambda=0}^{n} \sigma_\lambda(x_1,\ldots,x_n)s^\lambda \; d\mu_n(x) = \\ = \sum_{k,\lambda=0}^{n} t^k s^\lambda \int_{E_n} \sigma_k(x_1,\ldots,x_n)\sigma_\lambda(x_1,\ldots,x_n)\; d\mu_n(x) \; . \end{aligned} \tag{4.12}$$

Απο τις (4.10), (4.11), (4.12) έχουμε

$$\int_{E_n} \sigma_k(x_1,\ldots,x_n)\sigma_\lambda(x_1,\ldots,x_n)\; d\mu_n(x) = \begin{cases} \binom{n}{\mu}\frac{1}{(2n)^\mu}, & \text{αν } k=\lambda=\mu \\ \\ 0, & \text{αν } k \neq \lambda \; . \end{cases} \tag{4.13}$$

□

Ορισμός 4.2.3 *Για κάθε* n,k *με* $0 \le k \le n$ *ορίζουμε*

$$\phi_{n,k}(x) = (2n)^{\frac{k}{2}} \frac{1}{\sqrt{\binom{n}{k}}}\; \sigma_k(x_1,\ldots,x_n) \quad , \quad x=(x_1,\ldots,x_n) \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{2n}},\frac{1}{\sqrt{2n}}\right\}^n \; . \tag{4.14}$$

Απο τις σχέσεις (4.13) βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις

$$\phi_{n,k}(x) \quad , \quad 0 \le k \le n$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbf{X}_n \subseteq L^2(E_n, \mu_n)$.

Κάθε πολυώνυμο $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, βαθμού μικρότερου ή ίσου με n γράφεται με μοναδικό τρόπο σαν

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \mathbf{H}_k(x) \ .$$

Με $\mathbb{C}_n\,[x]$ συμβολίζουμε το χώρο όλων των πολυωνύμων μεταβλητής $x \in \mathbb{R}$ βαθμού το πολύ n με συντελεστές στο $\mathbb{C}$.

Ορισμός 4.2.4 *Για κάθε* n *ορίζουμε τον τελεστή*

$$S_n : \mathbb{C}_n\,[x] \longrightarrow \mathbf{X}_n$$

ο οποίος δίνεται απο τον τύπο

$$S_n \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \mathbf{H}_k \right) = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_{n,k} \ . \tag{4.15}$$

Ορισμός 4.2.5 *Για κάθε* n *ορίζουμε τον τελεστή*

$$K_{n,t} : \mathbf{X}_n \longrightarrow \mathbf{X}_n$$

με τύπο

$$K_{n,t} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \phi_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k \phi_{n,k} \ . \tag{4.16}$$

Απο το Λήμμα 4.1.2 και τις σχέσεις (4.15), (4.16) είναι φανερό ότι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}_n\,[x] \arrow[r, "T_t"] \arrow[d, "S_n"'] & \mathbb{C}_n\,[x] \arrow[d, "S_n"] \\ \mathbf{X}_n \arrow[r, "K_{n,t}"'] & \mathbf{X}_n \end{tikzcd}$$

είναι αντιμεταθετικό. Πράγματι για κάθε $g = \sum_{k=0}^{n} c_k \mathbf{H}_k$ ισχύει:

$$(S_n T_t)(g) = S_n \left(\sum_{k=0}^{n} c_k t^k \mathbf{H}_k \right) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k \phi_{n,k} \ ,$$

$$(K_{n,t} S_n)(g) = K_{n,t} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \phi_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k \phi_{n,k} \ .$$

Επίσης είναι φανερό ότι ο τελεστής S_n είναι ισομετρία ανάμεσα στους χώρους με εσωτερικό γινόμενο $\mathbb{C}_n\,[x] \subseteq L^2(\mathbb{R}, \mu)$ και $\mathbf{X}_n \subseteq L^2(E_n, \mu_n)$ αφού απεικονίζει την ορθοκανονική βάση $\{\mathbf{H}_k / \ 0 \le k \le n\}$ του πρώτου στην ορθοκανονική βάση $\{\phi_{n,k} / \ 0 \le k \le n\}$ του δεύτερου. Με αυτήν την έννοια ο $K_{n,t}$ είναι ένα διακριτό «ανάλογο» του T_t αν αυτός περιορισθεί στον $\mathbb{C}_n\,[x] \subseteq L^2(\mathbb{R}, \mu)$.

Θα αποδείξουμε τρία θεωρήματα.

Θεώρημα 4.2.1 *Αν* $t = i\sqrt{p-1}, 1 < p < 2, q = \frac{p}{p-1}$ *τότε για κάθε n ισχύει*

$$\left(\int_{E_n} |(K_{n,t}h)(x)|^q \ d\mu_n(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_{E_n} |h(x)|^p \ d\mu_n(x)\right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad h \in \mathbf{X}_n \ . \tag{4.17}$$

Θεώρημα 4.2.2 *Για κάθε πολυώνυμο* $g(x),\ x \in \mathbb{R}$, *ισχύει ότι*

$$(i) \qquad \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p \, d\nu_n(x)\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_{E_n} |(S_n g)(x)|^p \, d\mu_n(x)\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0,\ n \to +\infty \tag{4.18}$$

$$(ii) \qquad \left(\int_{\mathbb{R}} |(T_t g)(x)|^q \, d\nu_n(x)\right)^{\frac{1}{q}} - \left(\int_{E_n} |(K_{n,t} S_n g)(x)|^q \, d\mu_n(x)\right)^{\frac{1}{q}} \longrightarrow 0,\ n \to +\infty \tag{4.19}$$

Το επόμενο Θεώρημα είναι ο τελικός μας στόχος.

Θεώρημα 4.2.3 *Έστω* $1 < p < 2$ *και* $q = \frac{p}{p-1}$. *Θέτουμε*

$$\mu = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{q}}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sqrt{\frac{p}{2\pi}}\right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

Τότε

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leq \mu \|f\|_p \quad , \quad f \in L^p(\mathbb{R}) \ .$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι τα Θεωρήματα 4.2.1 και 4.2.2 έχουν αποδειχθεί.

Θεωρούμε τυχόν πολυώνυμο $g(x),\ x \in \mathbb{R}$, και έστω k ο βαθμός του $g(x)$. Έστω $n \geq k$ και $n \to +\infty$.

Αν $g(x) = \sum_{\lambda=0}^{k} c_\lambda \mathbf{H}_\lambda(x)$, τότε απο το Λήμμα 4.2.1 και απο το Θεώρημα 4.2.2(i) παίρνουμε

$$\left(\int_{E_n} |(S_n g)(x)|^p \, d\mu_n(x)\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

Επίσης απο το Λήμμα 4.2.1 και το Θεώρημα 4.2.2(ii) παίρνουμε

$$\left(\int_{E_n} |(K_{n,t} S_n g)(x)|^q \, d\mu_n(x)\right)^{\frac{1}{q}} \longrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}} |(T_t g)(x)|^q \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \ .$$

Απο τις δύο αυτές σχέσεις και απο το Θεώρημα 4.2.1 με $h = S_n g$ παίρνουμε

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |(T_t g)(x)|^q \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|T_t g\|_{L^q(\mathbb{R},\mu)} \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R},\mu)} \ . \tag{4.20}$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.1(δ) η (4.20) ισχύει για κάθε $g \in L^p(\mathbb{R},\mu)$ οπότε το Λήμμα 4.1.3 συμπληρώνει την απόδειξη. □

Λήμμα 4.2.3 *Για κάθε* $n,\ k$ *με* $2 \leq k \leq n$ *ισχύει*

$$\phi_{n,k} = \sqrt{\frac{n}{k(n-k+1)}}\phi_{n,1}\phi_{n,k-1} - \sqrt{\frac{(k-1)(n-k+2)}{k(n-k+1)}}\phi_{n,k-2} \tag{4.21}$$

για τις τιμές των μεταβλητών $x_i = \pm\frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Απόδειξη: Απο τον ορισμό των $\phi_{n,k}$, δηλαδή την (4.14), συνεπάγεται ότι η (4.21) ισοδυναμεί με την

$$k\sigma_k(x_1,\ldots,x_n) = \sigma_1(x_1,\ldots,x_n)\sigma_{k-1}(x_1,\ldots,x_n) - \frac{n-k+2}{2n}\sigma_{k-2}(x_1,\ldots,x_n)\ . \tag{4.22}$$

Για να αποδείξουμε την (4.22) χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση

$$\mathcal{T}(x_1,\ldots,x_n;t) = \prod_{j=1}^{n}(1+x_jt) = \sum_{k=0}^{n} t^k\sigma_k(x_1,\ldots,x_n)\ .$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial t}(x_1,\ldots,x_n;t) &= \sum_{j=1}^{n} x_j\mathcal{T}(x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n;t)\\ &= \sum_{k=1}^{n} kt^{k-1}\sigma_k(x_1,\ldots,x_n)\ .\end{aligned}$$

Τώρα

$$\begin{aligned}\sigma_1(x_1,\ldots,x_n)\mathcal{T}(x_1,\ldots,x_n;t) &= \sum_{j=1}^{n} x_j\mathcal{T}(x_1,\ldots,x_n;t)\\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j(1+x_jt)\mathcal{T}(x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n;t)\ .\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}&\sigma_1(x_1,\ldots,x_n)\mathcal{T}(x_1,\ldots,x_n;t) - \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial t}(x_1,\ldots,x_n;t) =\\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j^2 t\mathcal{T}(x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n;t)\\ &= \frac{t}{2n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{T}(x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n;t)\ .\end{aligned} \tag{4.23}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_k(x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n) = (n-k)\sigma_k(x_1,\ldots,x_n)\ . \tag{4.24}$$

Αυτή η σχέση αποδεικνύεται ως εξής. Το $\sigma_k(x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n)$ περιέχει ακριβώς μία φορά το καθένα όλα τα γινόμενα των $x_1,\ldots,x_n$ ανα k στα οποία δεν εμφανίζεται το x_j . Άρα το αριστερό μέλος της (4.24) περιέχει τον οποιοδήποτε όρο $x_{i_1}\cdots x_{i_k}$ (με $i_1<\cdots<i_k$) ακριβώς τόσες φορές όσα είναι τα j για τα οποία το $\sigma_k(x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n)$ περιέχει αυτόν τον όρο. Το $x_{i_1}\cdots x_{i_k}$ περιέχεται σε κάποιο $\sigma_k(x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n)$ αν και μόνον αν $j\neq i_1,\ldots,i_k$. Άρα το πλήθος των j είναι $n-k$ και η (4.24) αποδείχθηκε.

Τώρα η (4.23) γίνεται με βάση την (4.24):

$$\begin{aligned}
&\sigma_1(x_1,\ldots,x_n)\mathcal{T}(x_1,\ldots,x_n;t)-\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial t}(x_1,\ldots,x_n;t)= \\
&=\frac{t}{2n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n}t^k\sigma_k(x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n) \\
&=\frac{t}{2n}\sum_{k=0}^{n}t^k(n-k)\sigma_k(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{k=2}^{n+2}\frac{n-k+2}{2n}\sigma_{k-2}(x_1,\ldots,x_n)t^{k-1}. \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

Απο την άλλη μεριά έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\sigma_1(x_1,\ldots,x_n)\mathcal{T}(x_1,\ldots,x_n;t)-\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial t}(x_1,\ldots,x_n;t)= \\
&=\sum_{k=0}^{n}\sigma_1(x_1,\ldots,x_n)\sigma_k(x_1,\ldots,x_n)t^k-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\sigma_{k+1}(x_1,\ldots,x_n)t^k \\
&=\sum_{k=1}^{n}\left[\sigma_1(x_1,\ldots,x_n)\sigma_{k-1}(x_1,\ldots,x_n)-k\sigma_k(x_1,\ldots,x_n)\right]t^{k-1}+ \\
&\qquad +\sigma_1(x_1,\ldots,x_n)\sigma_n(x_1,\ldots,x_n)\ t^n\ . \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

Εξισώνοντας συντελεστές στις (4.25), (4.26) παίρνουμε την (4.22). □

Λήμμα 4.2.4 *Για κάθε k, n με $1\le k\le n$ και για όλες τις τιμές των μεταβλητών $x_i=\pm\frac{1}{\sqrt{2n}}$ ισχύει ότι*

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}\phi_{n,k}(x_1,\ldots,x_n)= \\
&\qquad =\mathbf{H}_k(x_1+\cdots+x_n)+\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{[k/2]}a_{k,\ell}^{(n)}\ \mathbf{H}_{k-2\ell}(x_1+\cdots+x_n)\ . \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

Οι συντελεστές $a_{k,\ell}^{(n)}$ είναι, για κάθε k, φραγμένες συναρτήσεις του n.

Απόδειξη: Απο τις $\mathbf{H}_o(x)=1$, $\mathbf{H}_1(x)=\sqrt{2}x$, $\mathbf{H}_2(x)=\sqrt{2}x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}$ και τις $\phi_{n,o}(x_1,\ldots,x_n)=\sigma_o(x_1,\ldots,x_n)=1$, $\phi_{n,1}(x_1,\ldots,x_n)=\sqrt{2}\sigma_1(x_1,\ldots,x_n)=\sqrt{2}(x_1+\cdots+x_n)$, $\phi_{n,2}(x_1,\ldots,x_n)=2\sqrt{2}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_2(x_1,\ldots,x_n)=2\sqrt{2}\sqrt{\frac{n}{n-1}}(x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n)$ βλέπουμε εύκολα ότι

$$\begin{aligned}
\phi_{n,o}(x_1,\ldots,x_n) &= \mathbf{H}_o(x_1+\cdots+x_n) \\
\phi_{n,1}(x_1,\ldots,x_n) &= \mathbf{H}_1(x_1+\cdots+x_n) \\
\sqrt{1-\frac{1}{n}}\phi_{n,2}(x_1,\ldots,x_n) &= \mathbf{H}_2(x_1+\cdots+x_n)\ .
\end{aligned}$$

Επομένως η (4.27) αλήθεύει για $k=1,2$.

Για απλούστευση θέτουμε

$$\begin{aligned}
q_{n,k}(x_1,\ldots,x_n) &= \sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}\phi_{n,k}(x_1,\ldots,x_n) \\
&= \sqrt{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}\phi_{n,k}(x_1,\ldots,x_n) \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

οπότε η (4.27) ισοδυναμεί με

$$q_{n,k}(x_1,\ldots,x_n) = \mathbf{H}_k(x_1+\cdots+x_n) + \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{[k/2]} a_{k,\ell}^{(n)}\ \mathbf{H}_{k-2\ell}(x_1+\cdots+x_n)\ . \tag{4.29}$$

Ο αναδρομικός τύπος (4.21) με λίγες πράξεις γίνεται

$$q_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{k}}\ q_{n,1}q_{n,k-1} - \sqrt{\frac{k-1}{k}}\left(1-\frac{k-2}{n}\right)q_{n,k-2} \quad ,\ 2\le k\le n\ . \tag{4.30}$$

Επίσης έχουμε και τον αναδρομικό τύπο

$$\mathbf{H}_k = \frac{1}{\sqrt{k}}\mathbf{H}_1\mathbf{H}_{k-1} - \sqrt{\frac{k-1}{k}}\mathbf{H}_{k-2} \quad ,\ 2\le k \tag{4.31}$$

ο οποίος προέρχεται απο τον (2.2) και τις (4.2).

Η (4.29) θα αποδειχθεί επαγωγικά με βάση τις (4.30), (4.31) γνωρίζοντας ότι ισχύει για $k=1,2$. Έστω λοιπόν ότι η (4.29) ισχύει για $k, k-1$ με $2\le k\le n-1$. Τότε, γράφοντας με συντομία $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $\Sigma x = x_1+\cdots+x_n$, έχουμε

$$\begin{aligned}
q_{n,k+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{k+1}}q_{n,1}(x)q_{n,k}(x) - \sqrt{\frac{k}{k+1}}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)q_{n,k-1}(x) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{k+1}}\mathbf{H}_1(\Sigma x)\left\{\mathbf{H}_k(\Sigma x) + \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} a_{k,\ell}^{(n)}\mathbf{H}_{k-2\ell}(\Sigma x)\right\} - \\
&\qquad - \sqrt{\frac{k}{k+1}}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left\{\mathbf{H}_{k-1}(\Sigma x) + \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} a_{k-1,\ell}^{(n)}\mathbf{H}_{k-1-2\ell}(\Sigma x)\right\} \\
&= \mathbf{H}_{k+1}(\Sigma x) + \frac{1}{n}\Bigg\{(k-1)\sqrt{\frac{k}{k+1}}\mathbf{H}_{k-1}(\Sigma x) + \\
&\qquad + \sum_{\ell=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{a_{k,\ell}^{(n)}}{\sqrt{k+1}}\mathbf{H}_1(\Sigma x)\,\mathbf{H}_{k-2\ell}(\Sigma x) - \\
&\qquad - \sum_{\ell=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \sqrt{\frac{k}{k+1}}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_{k-1,\ell}^{(n)}\mathbf{H}_{k-1-2\ell}(\Sigma x)\Bigg\}\ .
\end{aligned}$$

Σ'αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι, αν θέσουμε $\mathbf{H}_{-1}(x)=0$, τότε ο αναδρομικός τύπος (4.31) ισχύει και για $k=1$. Επομένως αντικαθιστώντας το

$$\mathbf{H}_1(\Sigma x)\,\mathbf{H}_{k-2\ell}(\Sigma x) \quad \text{με} \quad \sqrt{k-2\ell+1}\mathbf{H}_{k-2\ell+1}(\Sigma x) + \sqrt{k-2\ell}\mathbf{H}_{k-2\ell-1}(\Sigma x)$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}
q_{n,k+1}(x) &= \mathbf{H}_{k+1}(\Sigma x) + \frac{1}{n}\Bigg\{(k-1)\sqrt{\frac{k}{k+1}}\mathbf{H}_{k-1}(\Sigma x) + \sum_{\ell=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\sqrt{\frac{k-2\ell+1}{k+1}}a_{k,\ell}^{(n)}\mathbf{H}_{k-2\ell+1}(\Sigma x) + \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\sqrt{\frac{k-2\ell}{k+1}}a_{k,\ell}^{(n)}\mathbf{H}_{k-2\ell-1}(\Sigma x) - \\
&\quad - \sum_{\ell=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\sqrt{\frac{k}{k+1}}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_{k-1,\ell}^{(n)}\mathbf{H}_{k-1-2\ell}(\Sigma x)\Bigg\} \\
&= \mathbf{H}_{k+1}(\Sigma x) + \frac{1}{n}\Bigg\{(k-1)\sqrt{\frac{k}{k+1}}\mathbf{H}_{k-1}(\Sigma x) + \sum_{\ell=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\sqrt{\frac{k-2\ell+1}{k+1}}a_{k,\ell}^{(n)}\mathbf{H}_{k+1-2\ell}(\Sigma x) + \\
&\quad + \sum_{\ell=2}^{\left[\frac{k+2}{2}\right]}\sqrt{\frac{k+2-2\ell}{k+1}}a_{k,\ell-1}^{(n)}\mathbf{H}_{k+1-2\ell}(\Sigma x) - \\
&\quad - \sum_{\ell=2}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}\sqrt{\frac{k}{k+1}}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_{k-1,\ell-1}^{(n)}\mathbf{H}_{k+1-2\ell}(\Sigma x)\Bigg\}\,.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος όρος $\ell = \left[\frac{k+2}{2}\right]$ στο δεύτερο άθροισμα είναι μηδέν, καθώς και ότι το πρώτο άθροισμα μπορεί να επεκταθεί σε $\ell = \left[\frac{k+1}{2}\right]$. Άρα

$$\begin{aligned}
q_{n,k+1}(x) &= \mathbf{H}_{k+1}(\Sigma x) + \frac{1}{n}\Bigg\{(k-1)\sqrt{\frac{k}{k+1}}\mathbf{H}_{k+1-2}(\Sigma x) + \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}a_{k,1}^{(n)}\mathbf{H}_{k+1-2}(\Sigma x) + \\
&\quad + \sum_{\ell=2}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}\Bigg[\sqrt{\frac{k-2\ell+1}{k+1}}a_{k,\ell}^{(n)} + \sqrt{\frac{k-2\ell+2}{k+1}}a_{k,\ell-1}^{(n)} - \\
&\quad - \sqrt{\frac{k}{k+1}}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_{k-1,\ell-1}^{(n)}\Bigg]\mathbf{H}_{k+1-2\ell}(\Sigma x)\Bigg\}
\end{aligned}$$

και επομένως αν θέσουμε

$$\begin{aligned}
a_{k+1,1}^{(n)} &= (k-1)\sqrt{\frac{k}{k+1}} + \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}a_{k,1}^{(n)} \qquad (4.32) \\
a_{k+1,\ell}^{(n)} &= \sqrt{\frac{k-2\ell+1}{k+1}}a_{k,\ell}^{(n)} + \sqrt{\frac{k-2\ell+2}{k+1}}a_{k,\ell-1}^{(n)} - \sqrt{\frac{k}{k+1}}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_{k-1,\ell-1}^{(n)} \quad , \; 2 \le \ell \le \left[\frac{k+1}{2}\right]
\end{aligned}$$

βλέπουμε αμέσως ότι ισχύει η (4.29) για $k+1$.

Επειδή $a_{2,1}^{(n)} = 0$ φαίνεται αμέσως (με επαγωγή) απο τις σχέσεις (4.32) ότι για σταθερό k οι συντελεστές $a_{k,\ell}^{(n)}$ είναι φραγμένες συναρτήσεις του n. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2 : Έστω πολυώνυμο $g(x) = \sum_{\lambda=0}^{k} c_\lambda \mathbf{H}_\lambda(x)$.
(i) Απο τη σχέση (4.9) έχουμε για $n \geq k$:

$$\begin{aligned}
&\left| \left(\int_{E_n} |S_n g(x)|^p \ d\mu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p \ d\nu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}} \right| = \\
= &\left| \left(\int_{E_n} |S_n g(x)|^p \ d\mu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_{E_n} |g(x_1 + \cdots + x_n)|^p \ d\mu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}} \right| \\
\leq &\left(\int_{E_n} |S_n g(x) - g(x_1 + \cdots + x_n)|^p \ d\mu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq &\left(\int_{E_n} \left| \sum_{\lambda=0}^{k} c_\lambda \left[\phi_{n,\lambda}(x_1, \ldots, x_n) - \mathbf{H}_\lambda(x_1 + \cdots + x_n) \right] \right|^p d\mu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq &\sum_{\lambda=0}^{k} |c_\lambda| \left(\int_{E_n} |\phi_{n,\lambda}(x_1, \ldots, x_n) - \mathbf{H}_\lambda(x_1 + \cdots + x_n)|^p \, d\mu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}} .
\end{aligned}$$

Απο το Λήμμα 4.2.4 και επειδή ο συντελεστής του $\phi_{n,k}$ στη σχέση (4.27) συγκλίνει στο 1 καθώς $n \to +\infty$ παίρνουμε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ η οποία εξαρτάται μόνο απο τα $|c_o|, \ldots, |c_k|$ και απο το k αλλά όχι απο το n ώστε

$$\begin{aligned}
&\left| \left(\int_{E_n} |S_n g(x)|^p \ d\mu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p \ d\nu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}} \right| \leq \\
\leq &\ \frac{c}{n} \sum_{\lambda=0}^{k} \left(\int_{E_n} |\mathbf{H}_\lambda(x_1 + \cdots + x_n)|^p \ d\mu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\
= &\ \frac{c}{n} \sum_{\lambda=0}^{k} \left(\int_{\mathbb{R}} |\mathbf{H}_\lambda(x)|^p \ d\nu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{απο την (4.9).}
\end{aligned}$$

Όπως είδαμε στο Βήμα 2 της απόδειξης του Λήμματος 4.2.1 οι ροπές των ν_n είναι ομοιόμορφα φραγμένες (ως προς n). Άρα η τελευταία παράσταση τείνει στο 0 όταν $n \to +\infty$.
(ii) Επειδή $K_{n,t} S_n g = S_n T_t g$ η (4.19) είναι πόρισμα της (4.18) αν αυτή εφαρμοσθεί στο πολυώνυμο $T_t g$. □

4.3 Αναγωγή του προβλήματος σε χώρο δύο σημείων

Απομένει να αποδειχθεί το Θεώρημα 4.2.1 το οποίο είναι το διακριτό ανάλογο του Θεωρήματος 4.2.3 στο διακριτό χώρο $\mathbf{X}_n$.

Θεωρούμε το χώρο μέτρου

$$E = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2n}}, \frac{1}{\sqrt{2n}} \right\} \quad , \quad d\sigma(x) = \frac{1}{2} d\delta_{-1}(\sqrt{2n}x) + \frac{1}{2} d\delta_1(\sqrt{2n}x) = d\nu(\sqrt{2n}x)$$

και γνωρίζουμε ότι κάθε συνάρτηση $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο σαν

$$f(x) = ax + b$$

με κατάλληλα $a, b \in \mathbb{C}$.

Θεωρούμε τον τελεστή

$$T_{x,t} : L^p(E,\sigma) \longrightarrow L^q(E,\sigma)$$

με τύπο

$$T_{x,t} : a + bx \longmapsto a + btx \ .$$

Επίσης ορίζουμε τον τελεστή

$$\overline{K_{n,t}} = T_{x_1,t} \otimes \cdots \otimes T_{x_n,t} : L^p(E \times \cdots \times E, \sigma \times \cdots \times \sigma) \longrightarrow L^q(E \times \cdots \times E, \sigma \times \cdots \times \sigma) \ ,$$

δηλαδή

$$\overline{K_{n,t}} : L^p(E_n, \mu_n) \longrightarrow L^q(E_n, \mu_n)$$

σύμφωνα με τον ορισμό 4.2.1 .

Λήμμα 4.3.1 *Ο περιορισμός του $\overline{K_{n,t}}$ στον $\mathbf{X}_n \subseteq L^p(E_n, \mu_n)$ ταυτίζεται με τον τελεστή $K_{n,t}$.*

Απόδειξη: Έστω $0 \le k \le n$. Επειδή ο $\overline{K_{n,t}}$ απλώς πολλαπλασιάζει κάθε μία απο τις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ με τον παράγοντα t συνεπάγεται ότι

$$\overline{K_{n,t}}(\sigma_k) = t^k \sigma_k \ .$$

Άρα για κάθε συμμετρική $h \in \mathbf{X}_n$, $h(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$, έχουμε

$$\overline{K_{n,t}}(h) = \sum_{k=0}^{n} c_k \overline{K_{n,t}}(\sigma_k) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k \sigma_k = K_{n,t} h$$

σύμφωνα με την (4.16). □

Θεώρημα 4.3.1 *Έστω $1 < p < 2$, $q = \frac{p}{p-1}$, $t = i\sqrt{p-1}$. Τότε*

$$\left(\int_E |T_{x,t} f(x)|^q \ d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\int_E |f(x)|^p \ d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.33}$$

για κάθε $f \in L^p(E, \sigma)$.

Απόδειξη: Με $f(x) = a + bx$ η (4.33) γίνεται

$$\left(\frac{1}{2} \left| a + tb\frac{1}{\sqrt{2n}} \right|^q + \frac{1}{2} \left| a - tb\frac{1}{\sqrt{2n}} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\frac{1}{2} \left| a + b\frac{1}{\sqrt{2n}} \right|^p + \frac{1}{2} \left| a - b\frac{1}{\sqrt{2n}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

Αν $a = 0$ η ανισότητα γίνεται $|t| \le 1$ που είναι σωστό. Έστω, λοιπόν, $a \ne 0$. Θέτοντας $z = \frac{b}{a\sqrt{2n}}$ παίρνουμε την ισοδύναμη ανισότητα :

$$\left(\frac{|1+tz|^q + |1-tz|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\frac{|1+z|^p + |1-z|^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad z \in \mathbb{C} \ . \tag{4.34}$$

Θέτουμε $z = \xi - i\frac{\eta}{\sqrt{p-1}}$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, οπότε

$$|1+tz|^2 = (1+\eta)^2 + \xi^2(p-1) \quad , \quad |1-tz|^2 = (1-\eta)^2 + \xi^2(p-1) \ ,$$
$$|1+z|^2 = (1+\xi)^2 + \eta^2(q-1) \quad , \quad |1-z|^2 = (1-\xi)^2 + \eta^2(q-1) \ .$$

Άρα η (4.34) ισοδυναμεί με

$$\left(\frac{\left[(1+\eta)^2+(p-1)\xi^2\right]^{\frac{q}{2}}+\left[(1-\eta)^2+(p-1)\xi^2\right]^{\frac{q}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{\left[(1+\xi)^2+(q-1)\eta^2\right]^{\frac{p}{2}}+\left[(1-\xi)^2+(q-1)\eta^2\right]^{\frac{p}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{p}} . \quad (4.35)$$

Απο την (4.5) έχουμε

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\left[(1+\eta)^2+(p-1)\xi^2\right]^{\frac{q}{2}}+\left[(1-\eta)^2+(p-1)\xi^2\right]^{\frac{q}{2}}}{2}\right)^{\frac{2}{q}} &= \|(1+\eta x)^2+(p-1)\xi^2\|_{L^{\frac{q}{2}}(\nu)} \\
&\leq \|(1+\eta x)^2\|_{L^{\frac{q}{2}}(\nu)}+\|(p-1)\xi^2\|_{L^{\frac{q}{2}}(\nu)} \qquad \text{επειδή } \frac{q}{2}>1 \\
&= \left(\frac{|1+\eta|^q+|1-\eta|^q}{2}\right)^{\frac{2}{q}}+(p-1)\xi^2 .
\end{aligned}$$

Επίσης

$$\left(\frac{\left[(1+\xi)^2+(q-1)\eta^2\right]^{\frac{p}{2}}+\left[(1-\xi)^2+(q-1)\eta^2\right]^{\frac{p}{2}}}{2}\right)^{\frac{2}{p}} = \|(1+\xi x)^2+(q-1)\eta^2\|_{L^{\frac{p}{2}}(\nu)}$$

και επειδή $\frac{p}{2}<1$ και $(1+\xi x)^2\geq 0,\ (q-1)\eta^2\geq 0$

$$\begin{aligned}
&\geq \|(1+\xi x)^2\|_{L^{\frac{p}{2}}(\nu)}+\|(q-1)\eta^2\|_{L^{\frac{p}{2}}(\nu)} \\
&= \left(\frac{|1+\xi|^p+|1-\xi|^p}{2}\right)^{\frac{2}{p}}+(q-1)\eta^2 .
\end{aligned}$$

Άρα η (4.35) είναι ασθενέστερη απο την ανισότητα

$$\left(\frac{|1+\eta|^q+|1-\eta|^q}{2}\right)^{\frac{2}{q}}+(p-1)\xi^2 \leq \left(\frac{|1+\xi|^p+|1-\xi|^p}{2}\right)^{\frac{2}{p}}+(q-1)\eta^2 . \quad (4.36)$$

Αν αποδείξουμε τις ανισότητες

$$\left(\frac{|1+\eta|^q+|1-\eta|^q}{2}\right)^{\frac{2}{q}} \leq 1+(q-1)\eta^2 \quad (4.37)$$

$$\left(\frac{|1+\xi|^p+|1-\xi|^p}{2}\right)^{\frac{2}{p}} \geq 1+(p-1)\xi^2 \quad (4.38)$$

είναι προφανές ότι συνεπάγεται η (4.36). Επίσης είναι φανερό (με $\xi=0$ ή $\eta=0$) ότι οι (4.37), (4.38) προκύπτουν απο την (4.36).

Άρα αρκεί να αποδείξουμε τις (4.37), (4.38).

Αρχίζουμε με την απόδειξη της (4.37).

Αρκεί να αποδείξουμε την (4.37) για $0 < \eta$ αφού αυτή μένει αμετάβλητη αν αλλάξουμε το η σε $-\eta$ και προφανής για $\eta = 0$. Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε την (4.37) για $0 < \eta \le 1$. Πράγματι αν ισχύει για κάποιο η με $0 < \eta \le 1$, τότε διαιρώντας την (4.37) με η^2 παίρνουμε

$$\left(\frac{\left|1+\frac{1}{\eta}\right|^q + \left|1-\frac{1}{\eta}\right|^q}{2} \right)^{\frac{2}{q}} \le \frac{1}{\eta^2} + (q-1) \; .$$

Επειδή : $\frac{1}{\eta^2} + (q-1) \le 1 + (q-1)\frac{1}{\eta^2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\eta^2} - 1\right)(q-2) \ge 0$ και επειδή η τελευταία ανισότητα ισχύει αφού $q > 2$, συνεπάγεται ότι

$$\left(\frac{\left|1+\frac{1}{\eta}\right|^q + \left|1-\frac{1}{\eta}\right|^q}{2} \right)^{\frac{2}{q}} \le 1 + (q-1)\frac{1}{\eta^2}$$

δηλαδή η ανισότητα (4.37) για $\frac{1}{\eta} \ge 1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$p(\eta) = \frac{1}{q}\log\left\{ \frac{|1+\eta|^q + |1-\eta|^q}{2} \right\} - \frac{1}{2}\log\left\{1 + (q-1)\eta^2\right\} \quad , \quad 0 < \eta \le 1$$

και αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$p(\eta) \le 0 \; , \quad 0 < \eta \le 1 \; . \tag{4.39}$$

Υπολογίζουμε :

$$\begin{aligned} p'(\eta) &= \frac{(1+\eta)^{q-1} - (1-\eta)^{q-1}}{(1+\eta)^q + (1-\eta)^q} - \frac{(q-1)\eta}{1+(q-1)\eta^2} \\ &= \frac{(1+\eta)^{q-1}\left[1-(q-1)\eta\right] - (1-\eta)^{q-1}\left[1+(q-1)\eta\right]}{\left[(1+\eta)^q + (1-\eta)^q\right]\left[1+(q-1)\eta^2\right]} \\ &= \frac{\Delta(\eta)}{\left[(1+\eta)^q + (1-\eta)^q\right]\left[1+(q-1)\eta^2\right]} \; . \end{aligned} \tag{4.40}$$

Τώρα

$$\Delta'(\eta) = -q(q-1)\eta\left\{(1+\eta)^{q-2} - (1-\eta)^{q-2}\right\} \le 0$$

για $0 < \eta \le 1$, αφού $q > 2$.

Άρα

$$\Delta(\eta) \le \Delta(0) = 0 \quad , \quad 0 < \eta \le 1$$

και επομένως απο την (4.40) παίρνουμε

$$p'(\eta) \le 0 \; , \quad 0 < \eta \le 1 \; .$$

Άρα

$$p(\eta) \le p(0) = 0 \; , \quad 0 < \eta \le 1 \; .$$

και επομένως αποδείχθηκε η (4.39) και κατ'επέκταση η (4.37).

Η απόδειξη της (4.38) είναι ακριβώς η ίδια : όλες οι ανισότητες αντιστρέφονται διότι $p < 2$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1 : Συνδυασμός του Θεωρήματος 4.3.1 και των Λημμάτων 1.2.1 και 4.3.1 . □

Βιβλιογραφία

[1] K.I. Babenko, *An inequality in the theory of Fourier integrals*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **25** (1961), 531-542 ; English transl., AMS Transl. (2) **44** (1965), 115-128.

[2] W. Beckner, *Inequalities in Fourier Analysis*, Ann. Math. **102** (1975), 159-182.

[3] G. Folland, *Real Analysis: modern techniques and their applications*, Wiley, New York, 1999.

[4] E. Lieb, *Gaussian kernels have only Gaussian maximizers*, Invent. Math., **102** (1990), 179-208

[5] E.M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1975.

[6] E.C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, 2^{nd} edition, Oxford Univ. Press, Oxford, 1948.

[7] N. Wiener, *The Fourier integral and certain of its applications*, Dover, New York, 1958.

[8] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959.