ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΔΩΔΕΚΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 1-11-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Άσκηση 2.2.7. *Έστω $\epsilon_0 > 0$. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν για κάθε ϵ με $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$.*

Λύση: Έχουμε να αποδείξουμε την ισοδυναμία ανάμεσα στις εξής δυο προτάσεις:

$$A: \qquad x_n \to x$$

και

$$B: \qquad \text{για κάθε } \epsilon \text{ με } 0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \text{ ισχύει τελικά } x_n \in N_x(\epsilon).$$

Σκεφτόμαστε ότι η διατύπωση του ορισμού του $x_n \to x$ μοιάζει πολύ με την διατύπωση της πρότασης B, οπότε αντικαθιστούμε την πρόταση A με τον αντίστοιχο ορισμό ώστε να συγκρίνουμε πιο εύκολα τις δυο προτάσεις. Έτσι έχουμε:

$$A: \qquad \text{για κάθε } \epsilon > 0 \text{ ισχύει τελικά } x_n \in N_x(\epsilon).$$

και

$$B: \qquad \text{για κάθε } \epsilon \text{ με } 0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \text{ ισχύει τελικά } x_n \in N_x(\epsilon).$$

Τώρα είναι προφανές ότι η πρόταση A συνεπάγεται την πρόταση B. Πράγματι, η πρόταση A λέει ότι *όλοι* οι $\epsilon > 0$ έχουν μια ιδιότητα (το να ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$) ενώ η πρόταση B λέει ότι *κάποιοι* $\epsilon > 0$, εκείνοι που είναι $\leq \epsilon_0$, έχουν την ίδια ιδιότητα.
Άρα μένει να δούμε αν η πρόταση B συνεπάγεται την πρόταση A.
Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι ισχύει η πρόταση B. Δηλαδή ότι οι $\epsilon > 0$ που είναι και $\leq \epsilon_0$ έχουν την ιδιότητα να ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$.
Για να αποδείξουμε ότι ισχύει η πρόταση A πρέπει να αποδείξουμε ότι και οι υπόλοιποι $\epsilon > 0$, δηλαδή εκείνοι που είναι $> \epsilon_0$, έχουν την ίδια ιδιότητα.
Έστω, λοιπόν, $\epsilon > \epsilon_0$. Επειδή υποθέσαμε ότι ισχύει η πρόταση B, συνεπάγεται ότι ο ϵ_0 έχει την ιδιότητα που συζητάμε, δηλαδή ότι ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon_0)$. Όμως, επειδή $\epsilon > \epsilon_0$, είναι $N_x(\epsilon_0) \subseteq N_x(\epsilon)$ (όταν μικραίνει η ακτίνα, μικραίνει και η αντίστοιχη περιοχή). Και, επειδή ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon_0)$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$.
Άρα και οι $\epsilon > 0$ που είναι $> \epsilon_0$ έχουν την ιδιότητα να ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$ και, επομένως, ισχύει η πρόταση A.

Άσκηση 2.3.25. *Βρείτε το λάθος στον συλλογισμό:*

$$1 = n \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \ (n \text{ φορές}) \ \to 0 + \cdots + 0 \ (n \text{ φορές}) \ = 0.$$

Λύση: Το συμπέρασμα είναι λάθος: $1 \to 0$. Άρα υπάρχει οπωσδήποτε λάθος στην "απόδειξη".
Το λάθος είναι στην εφαρμογή του κανόνα αθροίσματος. Ο κανόνας αθροίσματος εφαρμόζεται σε δυο ακολουθίες ή σε τρεις ακολουθίες ή, γενικότερα, σε k ακολουθίες. Όμως, το πλήθος k των ακολουθιών πρέπει να είναι σταθερό (ένα, δύο, ... εκατό), δηλαδή να μην εξαρτάται από τον δείκτη n των ακολουθιών. Στον παραπάνω συλλογισμό το πλήθος n είναι το ίδιο με τον δείκτη n.

Άσκηση 2.3.27. *Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) που δεν έχουν όριο ώστε η $(x_n + y_n)$ να έχει όριο.*

Λύση: Θεωρούμε μια οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) η οποία δεν έχει όριο και ως (y_n) θεωρούμε την αντίθετη της (x_n). Έτσι όταν προσθέσουμε τις δυο ακολουθίες αυτές θα

αλληλοαναιρεθούν και το αποτέλεσμα θα συγκλίνει!
Άρα παίρνουμε

$$x_n = (-1)^{n-1} \qquad \text{και} \qquad y_n = -x_n = -(-1)^{n-1}$$

οπότε

$$x_n + y_n = 0.$$

Τώρα, η (x_n) και η (y_n) δεν έχουν όριο, αλλά $x_n + y_n \to 0$.

Άσκηση 2.3.29. *Βρείτε ακολουθίες* $(x_n), y_n)$ *ώστε* $x_n \to +\infty, y_n \to -\infty$ *και η* (x_n+y_n) (i) *να έχει όριο οποιοδήποτε* $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) *να μην έχει όριο.*

Λύση: (i) Έστω $c \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$x_n = n + c \qquad \text{και} \qquad y_n = -n.$$

Τότε $x_n \to +\infty, y_n \to -\infty$ και $x_n + y_n = c \to c$.
Έστω $c = +\infty$. Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$x_n = 2n \qquad \text{και} \qquad y_n = -n.$$

Τότε $x_n \to +\infty, y_n \to -\infty$ και $x_n + y_n = 2n - n = n \to +\infty$.
Έστω $c = -\infty$. Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$x_n = n \qquad \text{και} \qquad y_n = -2n.$$

Τότε $x_n \to +\infty, y_n \to -\infty$ και $x_n + y_n = n - 2n = -n \to -\infty$.
(ii) Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$x_n = n + (-1)^n \qquad \text{και} \qquad y_n = -n.$$

Τότε $x_n \to +\infty, y_n \to -\infty$ και $x_n + y_n = n + (-1)^n - n = (-1)^n$, οπότε η $(x_n + y_n)$ δεν έχει όριο.
Το ότι $x_n \to +\infty$ ισχύει διότι ισχύει $x_n \geq n - 1$ για κάθε n και διότι $n - 1 \to +\infty$.

Άσκηση 2.3.32. *Αποδείξτε ότι για κάθε* x *υπάρχει ακολουθία ρητών* (r_n) *ώστε* $r_n \to x$. *Αποδείξτε το ίδιο με αύξουσα ακολουθία ρητών.*

Λύση: Πριν από τη λύση θα κάνουμε ένα μικρό σχόλιο. Αν μας έλεγαν ότι ο x είναι ρητός, το πρόβλημα θα ήταν πολύ εύκολο: θα θεωρούσαμε την σταθερή ακολουθία (x) όλοι οι όροι της οποίας είναι ρητοί και η οποία συγκλίνει στον x. Άρα το πρόβλημα έχει ουσιαστικό ενδιαφέρον μόνο όταν ο x είναι άρρητος.

Προκαταρκτικές σκέψεις:
Τώρα, για να βρούμε ρητούς οι οποίοι πλησιάζουν τον x θα ξεκινήσουμε με διαστήματα τα οποία συρρικνώνονται στον x και μέσα σε καθένα από αυτά τα διαστήματα θα επιλέξουμε έναν αντίστοιχο ρητό. Επειδή τα διαστήματα τα έχουμε πάρει να συρρικνώνονται στον x, συνεπάγεται ότι οι αντίστοιχοι ρητοί πλησιάζουν τον x.
Γιατί πρέπει να ξεκινήσουμε με διαστήματα και όχι κατ' ευθείαν με ρητούς; Διότι δεν υπάρχει τύπος που να δίνει ρητό αριθμό κοντά στον τυχαίο αριθμό x. Ενώ, αντιθέτως, υπάρχει τύπος που να δίνει ένα μικρό διάστημα κοντά στον x. Για παράδειγμα: $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ με $n \in \mathbb{N}$. Και μετά πώς θα βρούμε ρητό μέσα σε ένα τέτοιο διάστημα; Μα γι αυτόν τον σκοπό δεν χρειάζεται τύπος για τον ρητό: μας αρκεί ότι η πυκνότητα

των ρητών εξασφαλίζει την ύπαρξη ρητού σε οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα.
Πάμε στην λύση.
Θεωρούμε τα ανοικτά διαστήματα

$$\Big(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\Big) \qquad \text{για } n \in \mathbb{N}.$$

Από την πυκνότητα των ρητών συνεπάγεται ότι σε κάθε τέτοιο διάστημα υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός. Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός, τον συμβολίζουμε r_n, ώστε

$$x - \frac{1}{n} < r_n < x + \frac{1}{n} \qquad \text{για } n \in \mathbb{N}.$$

Έτσι δημιουργείται ακολουθία ρητών (r_n) η οποία, λόγω της ιδιότητας παρεμβολής, συγκλίνει στον x.

Για να βρούμε *αύξουσα* ακολουθία ρητών (r_n) ώστε $r_n \to x$ κάνουμε μια μικρή αλλαγή στην επιλογή των διαστημάτων. Θα χρησιμοποιήσουμε διαστήματα τα οποία πλησιάζουν τον x και, συγχρόνως, το καθένα από αυτά τα διαστήματα θα βρίσκεται δεξιά του προηγουμένου διαστήματος.
Θεωρούμε, λοιπόν, τα ανοικτά διαστήματα

$$\Big(x - \frac{1}{n}, x - \frac{1}{n+1}\Big) \qquad \text{για } n \in \mathbb{N}.$$

Λόγω της πυκνότητας των ρητών, σε κάθε τέτοιο διάστημα υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός. Δηλαδή υπάρχει ρητός, τον συμβολίζουμε r_n, ώστε

$$x - \frac{1}{n} < r_n < x - \frac{1}{n+1} \qquad \text{για } n \in \mathbb{N}.$$

Έτσι έχουμε ακολουθία ρητών (r_n) η οποία, λόγω της ιδιότητας παρεμβολής, συγκλίνει στον x.
Επίσης, η (r_n) είναι αύξουσα διότι το διάστημα $(x - \frac{1}{n}, x - \frac{1}{n+1})$ στο οποίο ανήκει ο r_n είναι αριστερά του διαστήματος $(x - \frac{1}{n+1}, x - \frac{1}{n+2})$ στο οποίο ανήκει ο r_{n+1}.

Άσκηση 2.3.17. *Βρείτε το όριο της ακολουθίας*

$$x_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$

Λύση: Ο κανόνας λόγου καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και δεν υπάρχει προφανής τρόπος απλοποίησης του λόγου $\frac{(3n)!}{(n!)^3}$.
Μας έρχεται η έμπνευση να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο λόγου:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3}}{\frac{(3n)!}{(n!)^3}} = \frac{(3n+3)!}{(3n)!}\Big(\frac{n!}{(n+1)!}\Big)^3 = \frac{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(3n)!}\,\frac{1}{(n+1)^3}$$
$$= \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)^3} = \frac{27n^3 + \cdots}{n^3 + \cdots} \to 27.$$

Επειδή $27 > 1$, συνεπάγεται $x_n \to +\infty$.

Άσκηση 2.4.1. *Βρείτε το όριο της ακολουθίας*

$$x_n = \frac{2^n n!}{n^n}.$$

Λύση: Όπως στην προηγούμενη άσκηση, ο κανόνας λόγου καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και δεν υπάρχει προφανής τρόπος απλοποίησης του λόγου $\frac{2^n n!}{n^n}$. Χρησιμοποιούμε πάλι το κριτήριο λόγου:

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{2^n n!(n+1)^{n+1}} = \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{(\frac{n+1}{n})^n} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Επειδή $\frac{2}{e} < 1$, συνεπάγεται $x_n \to 0$.

Άσκηση 2.3.14. *Βρείτε το όριο της ακολουθίας*

$$x_n = \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}.$$

Λύση: Σκεφτόμαστε ότι ο αριθμός $[\sqrt{n}]$ διαφέρει από τον $\sqrt{n}$ κατά μια ποσότητα η οποία είναι (απολύτως) < 1, δηλαδή "αμελητέα" σε σχέση με τον $\sqrt{n}$. Επομένως, ο $[\sqrt{n}]$ είναι περίπου ίσος με τον $\sqrt{n}$ και αυτό σημαίνει ότι, όταν ο n είναι πολύ μεγάλος, ο λόγος $\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$ είναι περίπου ίσος με τον λόγο $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1$. Περιμένουμε, λοιπόν, το όριο που ζητάμε να είναι 1.

Σε αυτόν τον συλλογισμό πρέπει να δώσουμε "μαθηματική" μορφή. Πώς θα εκφράσουμε με "μαθηματικό" τρόπο την βασική ιδέα του συλλογισμού ότι ο $[\sqrt{n}]$ διαφέρει από τον $\sqrt{n}$ κατά μια ποσότητα η οποία είναι (απολύτως) < 1; Μα με την γνωστή ανισότητα

$$[\sqrt{n}] \leq \sqrt{n} < [\sqrt{n}] + 1.$$

Αυτήν την ανισότητα την γράφουμε

$$\sqrt{n} - 1 < [\sqrt{n}] \leq \sqrt{n}$$

και μετά

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \leq 1$$

και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα παρεμβολής για να βρούμε ότι

$$\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \to 1.$$