ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΠΕΜΠΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 10-1-14

Μ. Παπαδημητράκης.

Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και σημείο $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η f έχει παράγωγο στο ξ αν υπάρχει το όριο

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος** της f στο ξ.
Ομοίως, αν το $\xi \in A$ είναι πλευρικό σημείο συσσώρευσης του A, τότε ορίζονται οι αντίστοιχες πλευρικές παράγωγοι

$$f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}, \qquad f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Τονίζω ότι τα παραπάνω όρια είναι αριθμοί ή $+\infty$ ή $-\infty$. Δηλαδή $f'(\xi) \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι *αριθμός*, τότε λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** στο ξ.

Άσκηση 5.1.3. *Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο*

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & \text{αν } x \le 0 \\ ax + b, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Βρείτε τα a, b ώστε να υπάρχει η $f'(0)$.

Λύση: Θέλουμε να υπάρχει το όριο $\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Ισοδύναμα, θέλουμε να υπάρχουν τα αντίστοιχα πλευρικά όρια και να είναι ίσα.
Το αριστερό πλευρικό όριο είναι εύκολο:

$$\lim_{x\to0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0-} \frac{2x^2 + x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to0-} (2x + 1) = 1.$$

Άρα θέλουμε το δεξιό πλευρικό όριο να είναι ίσο με 1. Δηλαδή,

$$\lim_{x\to0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to0+} \frac{ax + b - 1}{x} = 1 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to0+} \Big(a + \frac{b-1}{x}\Big) = 1.$$

Τώρα σκεφτόμαστε ότι το $\lim_{x\to0+}(a + \frac{b-1}{x})$ είναι ίσο με $(b-1)(+\infty)$, αν $b - 1 \ne 0$, και ίσο με a, αν $b - 1 = 0$. Άρα έχουμε, ισοδύναμα,

$$a = 1,\; b = 1.$$

Άρα η f έχει παράγωγο στο 0 αν και μόνο αν $a = b = 1$.

Και τώρα έχουμε την Πρόταση 5.3 του βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ, τότε είναι και συνεχής στο ξ.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η $f'(\xi)$ υπάρχει και είναι *αριθμός*. Τότε γράφουμε

$$f(x) = f(x) - f(\xi) + f(\xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}(x - \xi) + f(\xi)$$

και έχουμε

$$\lim_{x\to\xi} \Big(\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}(x - \xi)\Big) = f'(\xi) \cdot 0 = 0.$$

Εδώ ακριβώς χρησιμοποιούμε το ότι η $f'(\xi)$ είναι αριθμός, οπότε δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $(\pm\infty) \cdot 0$.
Άρα

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = 0 + f(\xi) = f(\xi)$$

και η f είναι συνεχής στο ξ. □

Τα επόμενα δυο παραδείγματα δείχνουν ότι, αν $f'(\xi) = \pm\infty$, τότε η f μπορεί να είναι αλλά μπορεί και να μην είναι συνεχής στο ξ.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x < 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Προφανώς, η f δεν είναι συνεχής στο 0. Όμως θα δούμε ότι η f έχει παράγωγο στο 0. Πράγματι,

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Άρα $f'(0) = +\infty$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & \text{αν } x \le 0 \\ \sqrt{x}, & \text{αν } x \ge 0 \end{cases}$$

Τώρα η f είναι συνεχής στο 0. Και

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{\sqrt{-x}} + \infty,$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Άρα $f'(0) = +\infty$.

Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{αν } x \le 0 \\ \sqrt{x}, & \text{αν } x \ge 0 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο 0 και

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{-\sqrt{-x}} - \infty,$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Άρα δεν υπάρχει η $f'(0)$.

Προσέξτε, διότι το βιβλίο του Λυκείου αναφέρει ότι σ' αυτήν την περίπτωση υπάρχει *ευθεία* εφαπτόμενη στο γράφημα της f στο σημείο $(0, f(0)) = (0, 0)$ και ότι αυτή η ευθεία είναι κατακόρυφη. Αυτό είναι *λάθος*, διότι δεν υπάρχει παράγωγος στο 0. Το σωστό είναι ότι υπάρχει εφαπτόμενη *ημιευθεία* στο γράφημα της f στο σημείο $(0, f(0)) = (0, 0)$ η οποία έχει κορυφή το σημείο $(0, 0)$ και είναι κατακόρυφη *προς τα πάνω*. Στο αμέσως προηγούμενο παράδειγμα, όπου $f'(0) = +\infty$, *υπάρχει* ευθεία εφαπτόμενη στο γράφημα της f στο σημείο $(0, f(0)) = (0,0)$ και αυτή η ευθεία είναι κατακόρυφη.

Τώρα θα δούμε κι άλλα ενδιαφέροντα παραδείγματα.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Η f είναι περιττή, οπότε αρκεί να την μελετήσουμε για $x > 0$. Το γράφημά της στο $(-\infty, 0)$ είναι το συμμετρικό ως προς το σημείο $(0,0)$ του γραφήματός της στο $(0, +\infty)$. Στο $(0, +\infty)$ η f μηδενίζεται στα σημεία $\frac{1}{n\pi}$ για $n \in \mathbb{N}$. Τα σημεία αυτά τείνουν στο 0 από τα δεξιά του και ορίζουν τα διαδοχικά (από τα δεξιά προς τα αριστερά) διαστήματα $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$, $(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi})$, $(\frac{1}{3\pi}, \frac{1}{2\pi})$, $(\frac{1}{4\pi}, \frac{1}{3\pi})$ κλπ. Τα διαστήματα αυτά προσεγγίζουν το 0 από τα δεξιά του. Στο πρώτο διάστημα η f είναι θετική, στο δεύτερο είναι αρνητική, στο τρίτο είναι θετική και, γενικότερα, αρχίζοντας από το πρώτο διάστημα όπου είναι θετική, περνώντας από κάθε διάστημα στο επόμενο διάστημα η f αλλάζει πρόσημο. Αν θεωρήσουμε τα διαστήματα περιττής τάξης (πρώτο, τρίτο, πέμπτο κλπ), τότε σε καθένα από αυτά υπάρχει ακριβώς ένα σημείο όπου η f έχει τιμή 1. Τα σημεία αυτά είναι τα $\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ για $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$. Αν θεωρήσουμε τα διαστήματα άρτιας τάξης (δεύτερο, τέταρτο, έκτο κλπ), τότε σε καθένα από αυτά υπάρχει ακριβώς ένα σημείο όπου η f έχει τιμή -1. Τα σημεία αυτά είναι τα $\frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{2}}$ για $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$. Πάντως, όλες οι τιμές της f είναι ανάμεσα στο -1 και στο 1, οπότε το γράφημα της f είναι ανάμεσα στις οριζόντιες ευθείες $y = -1$ και $y = 1$. Στα σημεία όπου η f έχει τιμή -1 το γράφημά της ακουμπά την ευθεία $y = -1$ και στα σημεία όπου η f έχει τιμή 1 το γράφημά της ακουμπά την ευθεία $y = 1$. Στα σημεία όπου η f έχει τιμή 0 το γράφημά της τέμνει την ευθεία $y = 0$, δηλαδή τον x-άξονα.
Το όριο της f στο $+\infty$ είναι $\lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = \sin 0 = 0$. Όμως, αυτό που μας ενδιαφέρει περισσότερο είναι το όριο στο 0.

$$\text{Το} \quad \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \quad \text{δεν υπάρχει.}$$

Μάλιστα, κανένα από τα δυο πλευρικά όρια στο 0 δεν υπάρχει. Πράγματι, αν το όριο $\lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x}$ υπήρχε και ήταν ίσο με $l \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \to 0$ και $x_n > 0$ για κάθε n θα συνεπαγόταν ότι $\sin\frac{1}{x_n} \to l$. Όμως, θεωρώντας την ακολουθία με τύπο $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ (τα σημεία όπου η f έχει τιμή 1), έχουμε ότι $\sin\frac{1}{x_n} = 1 \to 1$ και θεωρώντας την ακολουθία με τύπο $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{2}}$ (τα σημεία όπου η f έχει τιμή -1), έχουμε ότι $\sin\frac{1}{x_n} = -1 \to -1$. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο, διότι το l δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα 1 και -1. Θεωρώντας τις αντίθετες ακολουθίες, αποδεικνύουμε ότι ούτε το $\lim_{x\to 0-} \sin\frac{1}{x}$ υπάρχει.
Τώρα, αφού το όριο της f στο 0 δεν υπάρχει, η f δεν είναι συνεχής στο 0. Άρα η f δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο 0. Μάλιστα είναι εύκολο να δει κανείς ότι δεν υπάρχει καν η $f'(0)$ δηλαδή το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sin\frac{1}{x}$.

Το επόμενο παράδειγμα είναι μια παραλλαγή αυτού που μόλις είδαμε. Προσέξτε τις διαφορές.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Η f είναι άρτια, οπότε αρκεί να την μελετήσουμε για $x > 0$. Το γράφημά της στο $(-\infty, 0)$ είναι το συμμετρικό ως προς τον y-άξονα του γραφήματός της στο $(0, +\infty)$. Στο $(0, +\infty)$ η f μηδενίζεται στα σημεία $\frac{1}{n\pi}$ για $n \in \mathbb{N}$, όπως και η συνάρτηση του προηγούμενου παραδείγματος. Τα σημεία αυτά τείνουν στο 0 από τα δεξιά του και ορίζουν τα διαδοχικά (από τα δεξιά προς τα αριστερά) διαστήματα $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$, $(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi})$, $(\frac{1}{3\pi}, \frac{1}{2\pi})$, $(\frac{1}{4\pi}, \frac{1}{3\pi})$ κλπ. Τα διαστήματα αυτά προσεγγίζουν το 0 από τα δεξιά του. Στο πρώτο διάστημα η f είναι θετική, στο δεύτερο είναι αρνητική, στο τρίτο είναι θετική και, γενικότερα, αρχίζοντας από το πρώτο διάστημα όπου είναι θετική, περνώντας από κάθε διάστημα στο επόμενο διάστημα αλλάζει πρόσημο. Αν θεωρήσουμε τα διαστήματα περιττής τάξης (πρώτο, τρίτο, πέμπτο κλπ), τότε σε καθένα από αυτά υπάρχει ακριβώς ένα σημείο όπου ισχύει $f(x) = x$. Τα σημεία αυτά είναι τα $\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ για $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Αν θεωρήσουμε τα διαστήματα άρτιας τάξης (δεύτερο, τέταρτο, έκτο κλπ), τότε σε καθένα από αυτά υπάρχει ακριβώς ένα σημείο όπου ισχύει $f(x) = -x$. Τα σημεία αυτά είναι τα $\frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{2}}$ για $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$. Πάντως, για κάθε $x > 0$ ισχύει $-x \leq f(x) \leq x$, οπότε το γράφημα της f είναι ανάμεσα στις διαγώνιες ευθείες $y = -x$ και $y = x$. Στα σημεία όπου $f(x) = -x$ το γράφημα της f ακουμπά την ευθεία $y = -x$ και στα σημεία όπου $f(x) = x$ το γράφημα της f ακουμπά την ευθεία $y = x$. Στα σημεία όπου η f έχει τιμή 0 το γράφημά της τέμνει την ευθεία $y = 0$, δηλαδή τον x-άξονα.
Το όριο της f στο $+\infty$ είναι $\lim_{x \to +\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$. Στο 0 έχουμε

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0).$$

Δηλαδή η f είναι συνεχής στο 0. Όμως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, διότι όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα

$$\text{το} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \quad \text{δεν υπάρχει.}$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Η f είναι περιττή, οπότε αρκεί να την μελετήσουμε για $x > 0$. Το γράφημά της στο $(-\infty, 0)$ είναι το συμμετρικό ως προς το σημείο $(0, 0)$ του γραφήματός της στο $(0, +\infty)$. Τώρα είναι προφανές ότι η f είναι περίπου όπως η συνάρτηση του προηγούμενου παραδείγματος. Τα διαστήματα στο $(0, +\infty)$ όπου η f είναι θετική ή αρνητική είναι ακριβώς τα ίδια και τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η f είναι επίσης τα ίδια. Τα σημεία στα οποία η προηγούμενη συνάρτηση ήταν ίση με $-x$ ή x τώρα είναι τα σημεία στα οποία ισχύει $f(x) = -x^2$ ή $f(x) = x^2$, αντιστοίχως. Τώρα ισχύει $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$ για κάθε $x > 0$, οπότε το γράφημα της f είναι ανάμεσα στις παραβολές $y = -x^2$ και $y = x^2$. Στα σημεία όπου $f(x) = -x^2$ το γράφημα της f ακουμπά την παραβολή $y = -x^2$ και στα σημεία όπου $f(x) = x^2$ το γράφημα της f ακουμπά την παραβολή

$y = x^2$.
Το όριο της f στο $+\infty$ είναι $\lim_{x\to+\infty} x^2 \sin\frac{1}{x} = +\infty$. Στο 0 έχουμε

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0).$$

Δηλαδή η f είναι συνεχής στο 0. Τώρα η f είναι και παραγωγίσιμη στο 0 και

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Στο παράδειγμα αυτό μπορούμε να δούμε ότι *η παράγωγος μιας συνάρτησης μπορεί να μην είναι συνεχής*. Πράγματι, η παράγωγος της f που μελετάμε σ' αυτό το παράδειγα έχει τύπο

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Βλέπουμε ότι $\lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} = 0$ και ότι το $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει. (Το τελευταίο αποδεικνύεται όπως και το ότι το $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.) Άρα το $\lim_{x\to 0} f'(x)$ δεν υπάρχει, οπότε η f' δεν είναι συνεχής στο 0.