ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΑΘΗΜΑ, 10-10-13

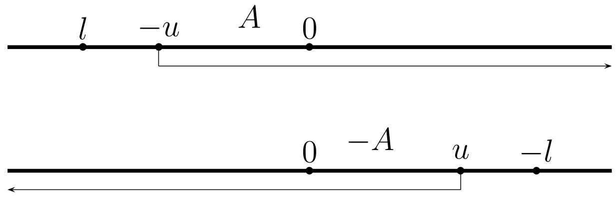
Μ. Παπαδημητράκης.

Τώρα θα δούμε την "συμμετρική" ιδιότητα της Ιδιότητας Supremum.

Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ INFIMUM. *Κάθε μη-κενό και κάτω φραγμένο σύνολο έχει μέγιστο κάτω φράγμα. Με άλλη διατύπωση: αν ένα μη-κενό σύνολο είναι κάτω φραγμένο (οπότε έχει τουλάχιστον ένα κάτω φράγμα), τότε από τα κάτω φράγματά του υπάρχει ένα το οποίο είναι το μέγιστο δυνατό.*

Απόδειξη. Έστω σύνολο A το οποίο είναι μη-κενό και κάτω φραγμένο.
Ορίζουμε το σύνολο

$$-A = \{-x \,|\, x \in A\}.$$



Το σύνολο $-A$ είναι το συμμετρικό του A ως προς το 0 και προφανώς είναι μη-κενό. Αν l είναι οποιοδήποτε κάτω φράγμα του A, τότε το $-l$ είναι άνω φράγμα του $-A$. Επειδή υπάρχει τουλάχιστον ένα κάτω φράγμα του A συνεπάγεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα άνω φράγμα του $-A$, οπότε το $-A$ είναι μη-κενό και άνω φραγμένο. Σύμφωνα με την Ιδιότητα Supremum το $-A$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Έστω

$$u = \sup(-A).$$

Θα δούμε ότι το $-u$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A και η απόδειξη θα τελειώσει.
(1) Το u είναι άνω φράγμα του $-A$, οπότε το $-u$ είναι κάτω φράγμα του A.
(2) Έστω τυχαίο κάτω φράγμα l του A. Τότε το $-l$ είναι άνω φράγμα του $-A$ και, επειδή το u είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του $-A$, συνεπάγεται $u \leq -l$. Άρα $l \leq -u$.
Από τα (1), (2) συνεπάγεται ότι το $-u$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A. □

Το μέγιστο κάτω φράγμα ενός μη-κενού, κάτω φραγμένου συνόλου A ονομάζεται **infimum** του A και συμβολίζεται $\inf A$.

Παραδείγματα. Γνωρίζουμε ήδη ότι $\inf[a, b] = a$ και $\inf(a, b) = a$.
Παρατηρήστε ότι το $[a, b]$ έχει ελάχιστο στοιχείο ενώ το (a, b) δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν το σύνολο A έχει ελάχιστο στοιχείο,* $\min A$, *τότε αυτό είναι το* $\inf A$.

Η απόδειξη της Πρότασης αυτής είναι ίδια με την απόδειξη της ανάλογης Πρότασης για τη σχέση ανάμεσα στα $\sup A$ και $\max A$. Μπορείτε να την κάνετε μόνοι σας.

Αν το μη-κενό σύνολο A δεν είναι άνω φραγμένο, τότε δεν υπάρχει κανένα άνω φράγμα του A, οπότε δεν υπάρχει ούτε ελάχιστο άνω φράγμα του A. Μπορούμε, όμως, να επεκτείνουμε κάπως την έννοια του άνω φράγματος και να συμπεριλάβουμε το $+\infty$ ως άνω φράγμα του A. Επειδή το $+\infty$ είναι το μοναδικό άνω φράγμα του A, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτό είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Γι αυτόν τον λόγο στην περίπτωση ενός μη-κενού αλλά όχι άνω φραγμένου συνόλου A ορίζουμε $\sup A = +\infty$. Ομοίως, στην περίπτωση ενός μη-κενού αλλά όχι κάτω φραγμένου συνόλου A ορίζουμε $\inf A = -\infty$.

Παραδείγματα. Το $\{x \,|\, x > 0\}$ δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup\{x \,|\, x > 0\} = +\infty$. Ομοίως, το $\{x \,|\, x < 0\}$ δεν είναι κάτω φραγμένο, οπότε $\inf\{x \,|\, x < 0\} = -\infty$.
Μην ξεχνάμε ότι τα σύνολα αυτά συμβολίζονται και $(0, +\infty)$ και $(-\infty, 0)$, οπότε γενικότερα το supremum ενός διαστήματος ταυτίζεται με το δεξιό άκρο του και το infimum ενός διαστήματος ταυτίζεται με το αριστερό άκρο του.

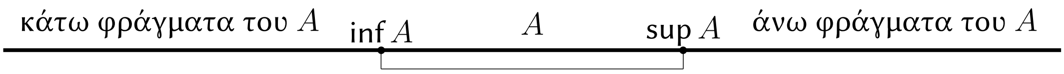
Έτσι λοιπόν κάθε μη-κενό σύνολο έχει supremum το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$. Στην περίπτωση που το σύνολο είναι άνω φραγμένο το supremum του είναι αριθμός και η ύπαρξή του αποδεικνύεται από την Ιδιότητα Supremum ενώ στην περίπτωση που το σύνολο δεν είναι άνω φραγμένο το supremum του είναι $+\infty$ εξ ορισμού. Ομοίως, στην περίπτωση που το σύνολο είναι κάτω φραγμένο το infimum του είναι αριθμός και η ύπαρξή του αποδεικνύεται από την Ιδιότητα Infimum ενώ στην περίπτωση που το σύνολο δεν είναι κάτω φραγμένο το infimum του είναι $-\infty$ εξ ορισμού.

Υπάρχει μια απλή σχέση ανάμεσα στο infimum και στο supremum ενός μη-κενού συνόλου A:

$$\inf A \leq \sup A.$$

Πράγματι, για κάθε $a \in A$ (το σύνολο είναι μη-κενό) ισχύει $a \leq \sup A$ διότι το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A και ισχύει $\inf A \leq a$ διότι το $\inf A$ είναι κάτω φράγμα του A. Άρα $\inf A \leq \sup A$.

Είναι φανερό ότι το σύνολο A βρίσκεται ανάμεσα στα $\inf A$ και $\sup A$, ότι (αν το A είναι άνω φραγμένο) τα άνω φράγματα του A είναι όλοι οι αριθμοί $\geq \sup A$ και κανένας άλλος και ότι (αν το A είναι κάτω φραγμένο) τα κάτω φράγματα του A είναι όλοι οι αριθμοί $\leq \inf A$ και κανένας άλλος.



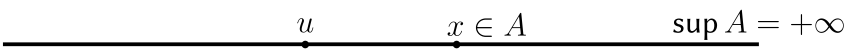
Τώρα θα δούμε δυο χαρακτηριστικές ιδιότητες του supremum οποιουδήποτε μη-κενού συνόλου A.

(i) *Δεν υπάρχει στο A στοιχείο $>$ από το* $\sup A$.

Αυτή η ιδιότητα λέει ότι όλα τα στοιχεία του A είναι $\leq \sup A$ και εκφράζει απλώς το ότι το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A. Παρατηρήστε ότι ισχύει είτε το $\sup A$ είναι αριθμός είτε το $\sup A$ είναι $+\infty$.

(ii) *Όσο θέλουμε κοντά στο* $\sup A$ *υπάρχει στοιχείο του A.*

Αυτή η ιδιότητα έχει να κάνει με το ότι το $\sup A$ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση: Το A δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup A + \infty$. Τότε παίρνουμε έναν αριθμό u όσο θέλουμε μεγάλο. Ο u δεν είναι άνω φράγμα του A, οπότε υπάρχει στοιχείο $x \in A$ ώστε $x > u$. Άρα, λοιπόν, όσο θέλουμε κοντά στο $\sup A = +\infty$ (δηλαδή κοντύτερα στο $+\infty$ από οποιονδήποτε μεγάλο αριθμό u) υπάρχει στοιχείο του A.



Δεύτερη περίπτωση: Το A είναι άνω φραγμένο, οπότε το $\sup A$ είναι αριθμός. Τότε παίρνουμε έναν αριθμό $\epsilon > 0$ όσο θέλουμε μικρό. Τότε ο $\sup A - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A (αφού το $\sup A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A), οπότε υπάρχει στοιχείο $x \in A$ ώστε $\sup A - \epsilon < x$. Και επειδή το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A πρέπει να είναι $\sup A - \epsilon < x \leq \sup A$. Αυτό μας λέει ότι ο x απέχει από το $\sup A$ απόσταση $< \epsilon$. Άρα, πράγματι, όσο θέλουμε κοντά στο $\sup A$ (δηλαδή σε απόσταση από το $\sup A$ μικρότερη από οποιονδήποτε μικρό θετικό ϵ) υπάρχει στοιχείο του A.

Τις δυο αυτές ιδιότητες του $\sup A$ μπορούμε να τις διατυπώσουμε λίγο διαφορετικά:

(i) *Για κάθε* $x \in A$ *ισχύει* $x \leq \sup A$.

(ii) *Για κάθε* $\gamma < \sup A$ *υπάρχει* $x \in A$ *ώστε* $\gamma < x \leq \sup A$.

Ο γ είναι ένα άλλο σύμβολο για τον u που χρησιμοποιήσαμε στην πρώτη περίπτωση ($\sup A = +\infty$) και ένα άλλο σύμβολο για τον $\sup A - \epsilon$ που χρησιμοποιήσαμε στην δεύτερη περίπτωση ($\sup A < +\infty$). Παρατηρήστε ότι σ' αυτήν την δεύτερη περίπτωση, όταν ο ϵ διατρέχει όλους τους θετικούς αριθμούς τότε ο $\gamma = \sup A - \epsilon$ διατρέχει όλους τους αριθμούς $< \sup A$ και αντιστρόφως.

Υπάρχουν και οι ανάλογες ιδιότητες του infimum ενός μη-κενού συνόλου:

(i) *Δεν υπάρχει στο* A *στοιχείο* $<$ *από το* $\inf A$. *Αλλιώς: για κάθε* $x \in A$ *ισχύει* $\inf A \leq x$.

(ii) *Όσο θέλουμε κοντά στο* $\inf A$ *υπάρχει στοιχείο του* A. *Αλλιώς: Για κάθε* $\gamma > \inf A$ *υπάρχει* $x \in A$ *ώστε* $\inf A \leq x < \gamma$.

Μια παρατήρηση: το supremum ενός συνόλου δεν είναι αναγκαστικά στοιχείο του συνόλου. Αυτό φαίνεται καθαρά στο παράδειγμα του διαστήματος (a, b). Είναι προφανές ότι, αν το $\sup A$ είναι στοιχείο του συνόλου A, τότε το $\sup A$ είναι το μέγιστο στοιχείο του A. Δηλαδή, το $\sup A$ ανήκει στο A αν και μόνο αν το A έχει μέγιστο στοιχείο και τότε $\sup A = \max A$.

Όταν θέλουμε να βρούμε το supremum ενός συγκεκριμένου συνόλου A προσπαθούμε κατ' αρχάς να φτιάξουμε μια όσο το δυνατόν πιο πιστή εικόνα του πάνω στην πραγματική ευθεία είτε στο χαρτί είτε στη φαντασία μας. Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο, τότε αυτομάτως $\sup A = +\infty$. Αν το A είναι άνω φραγμένο, τότε εντοπίζουμε ένα οποιοδήποτε άνω φράγμα u του A και (στοχεύοντας προς το μικρότερο άνω φράγμα του A) αρχίζουμε να μετακινούμε αυτό το άνω φράγμα u προς τα αριστερά προσέχοντας ώστε το u να παραμένει άνω φράγμα του A. Κάποια στιγμή θα πετύχουμε την θέση u_0 του u στην οποία αυτό είναι άνω φράγμα του A έτσι ώστε αν μετακινηθεί έστω και λίγο προς τα αριστερά από εκείνη την θέση παύει να είναι άνω φράγμα του A. Τότε ο u_0 είναι το supremum του A. Για να εντοπίσουμε το infimum του A κάνουμε τα ίδια αλλά από την άλλη μεριά. Βρίσκουμε ένα οποιοδήποτε κάτω φράγμα l του A και το μετακινούμε προς τα δεξιά μέχρι να πετύχουμε την θέση l_0 του l στην οποία αυτό είναι κάτω φράγμα του A έτσι ώστε αν μετακινηθεί έστω και λίγο προς τα δεξιά από εκείνη την θέση παύει να είναι κάτω φράγμα του A. Τότε ο l_0 είναι το infimum του A. Φυσικά, αν το A δεν είναι κάτω φραγμένο, τότε αυτομάτως είναι $\inf A = -\infty$.

Μέχρι τώρα τα παραδείγματα συνόλων που εξετάσαμε σε σχέση με το supremum και το infimum ήταν διαστήματα.

Παράδειγμα. θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ των φυσικών αριθμών.

Το $\mathbb{N}$ έχει τον 1 ως ελάχιστο στοιχείο, οπότε

$$\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 1.$$

Η κατάσταση από την πάνω μεριά είναι πιο ενδιαφέρουσα!
Κατ' αρχάς είναι απλό να δούμε ότι το $\mathbb{N}$ *δεν έχει μέγιστο στοιχείο*. Πράγματι, αν κάποιος $n \in \mathbb{N}$ ήταν μέγιστο στοιχείο του $\mathbb{N}$ τότε, επειδή $n+1 \in \mathbb{N}$, θα ίσχυε $n+1 \leq n$ που είναι άτοπο. Με άλλη διατύπωση: όποιον $n \in \mathbb{N}$ κι αν πάρουμε υπάρχει στοιχείο του $\mathbb{N}$, ο $n+1$, το οποίο είναι $> n$, οπότε ο n δεν είναι μέγιστο στοιχείο του $\mathbb{N}$.
Είναι, όμως, αρκετά πιο δύσκολο να δούμε αν το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο ή όχι. Όταν σχεδιάζουμε τους φυσικούς αριθμούς πάνω στην πραγματική ευθεία τους κάνουμε να απομακρύνονται απεριόριστα προς τα δεξιά υπονοώντας κατά κάποιο τρόπο ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Αυτό, όμως, αν πράγματι ισχύει, χρειάζεται απόδειξη.
Ας προσπαθήσουμε να μιμηθούμε την προηγούμενη απόδειξη του ότι το $\mathbb{N}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο για να αποδείξουμε ότι το $\mathbb{N}$ δεν έχει κανένα άνω φράγμα. Θεωρούμε ότι κάποιος u είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$ (ελπίζοντας να καταλήξουμε σε άτοπο) έχοντας υπ' όψη ότι ο u είναι πραγματικός αριθμός αλλά *όχι αναγκαστικά φυσικός*. Τώρα, όμως, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $u+1 \leq u$ (που θα μας έφτανε στο πολυπόθητο άτοπο) διότι ο $u+1$ δεν είναι αναγκαστικά στοιχείο του $\mathbb{N}$. Προσέξτε: αν ο u ήταν φυσικός, τότε ο $u+1$ θα ήταν κι αυτός φυσικός και θα συμπεραίναμε $u+1 \leq u$ (αφού ο u υποτίθεται ότι είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$). Όμως, ο u δεν είναι αναγκαστικά φυσικός, οπότε ούτε κι ο $u+1$ είναι αναγκαστικά φυσικός. Άρα το επιχείρημα αυτό δεν δουλεύει και πρέπει να βρούμε έναν διαφορετικό τρόπο απόδειξης του ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Η απόδειξη προχωράει μόνο μέσω της Ιδιότητας Supremum!

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε*

$$\sup \mathbb{N} = +\infty.$$

Απόδειξη. Έστω ότι το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο. Τότε, σύμφωνα με την Ιδιότητα Supremum, το $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα, $\sup \mathbb{N}$, το οποίο είναι αριθμός.
Από την δεύτερη χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sup \mathbb{N} - 1 < n \leq \sup \mathbb{N}.$$

Συνεπάγεται

$$\sup \mathbb{N} < n + 1.$$

Αυτό είναι άτοπο, διότι $n+1 \in \mathbb{N}$ ενώ ο $\sup \mathbb{N}$ είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. □

Αυτό είναι το Θεώρημα 1.1 στο βιβλίο.
Και ερχόμαστε στην

Η ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ. *Αν $l > 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \frac{1}{n} < l$.*

Απόδειξη. Ο $\frac{1}{l}$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$ (διότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο). Άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{l} < n$. □