ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΕΙΚΟΣΤΟ ΟΓΔΟΟ ΜΑΘΗΜΑ, 10-12-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Θεωρούμε μια συνάρτηση

$$f\,:\,A\to\mathbb{R}$$

και ένα σημείο $\xi\in A$.

Λέμε ότι η f είναι **συνεχής** στο ξ αν το $f(x)$ είναι όσο θέλουμε κοντά στο $f(\xi)$ αρκεί το x να είναι αρκετά κοντά στο ξ ή, ισοδύναμα, αν η απόσταση $|f(x)-f(\xi)|$ μπορεί να γίνει όσο θέλουμε μικρή αρκεί η απόσταση $|x-\xi|$ να γίνει αρκετά μικρή ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon>0$, οσοδήποτε μικρό, ισχύει $|f(x)-f(\xi)|<\epsilon$ αρκεί να είναι $|x-\xi|<\delta$ για κάποιο κατάλληλο $\delta>0$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει κάποιο $\delta>0$ ώστε

$$x\in A, |x-\xi|<\delta\qquad\Rightarrow\qquad |f(x)-f(\xi)|<\epsilon.$$

Ας δούμε ποιά είναι η σχέση ανάμεσα στην έννοια της συνέχειας και στην έννοια του ορίου.

Πρώτη περίπτωση: Το ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A ή, με άλλα λόγια, είναι μεμονωμένο σημείο του A.
Για παράδειγμα το σημείο 0 είναι μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού $A=\{0\}\cup[1,+\infty)$ της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^2(x-1)}$, όπως έχουμε δει σε προηγούμενο παράδειγμα.
Στην περίπτωση αυτή υπάρχει κάποιο $\delta_0>0$ έτσι ώστε το ξ να είναι το μοναδικό σημείο του A που βρίσκεται στην περιοχή $(\xi-\delta_0,\xi+\delta_0)$.
Έστω, τώρα, ένα οποιοδήποτε $\epsilon>0$. Θεωρούμε $\delta=\delta_0$ και τότε

$$x\in A, |x-\xi|<\delta_0\quad\Rightarrow\quad x=\xi\quad\Rightarrow\quad |f(x)-f(\xi)|=|f(\xi)-f(\xi)|=0<\epsilon.$$

Δηλαδή, ο ορισμός της συνέχειας ικανοποιείται παίρνοντας το ίδιο $\delta=\delta_0>0$ για όλα τα $\epsilon>0$.
Επομένως, αν το ξ είναι μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, τότε η συνάρτηση είναι αυτομάτως συνεχής στο ξ.

Δεύτερη περίπτωση: Το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A.
Σ' αυτήν την περίπτωση έχει νόημα να μιλήσουμε για το $\lim_{x\to\xi}f(x)$ και θα δούμε ότι

$$f \text{ συνεχής στο } \xi\qquad\Leftrightarrow\qquad \lim_{x\to\xi}f(x)=f(\xi).$$

Θα αντιπαραβάλλουμε τους ορισμούς των δυο εννοιών για να πιστοποιήσουμε την ισοδυναμία:

$$f \text{ συνεχής στο } \xi\quad \forall\epsilon>0\;\exists\delta>0\;:\;\big(x\in A, |x-\xi|<\delta\;\Rightarrow\;|f(x)-f(\xi)|<\epsilon\big).$$

$$\lim_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)\quad \forall\epsilon>0\;\exists\delta>0\;:\;\big(x\in A, 0<|x-\xi|<\delta\;\Rightarrow\;|f(x)-f(\xi)|<\epsilon\big).$$

Η πρώτη γραμμή λέει ότι όλα τα $x\in A$ που ανήκουν στην περιοχή $(\xi-\delta,\xi+\delta)$ (συμπεριλαμβανομένου του $x=\xi$) ικανοποιούν την $|f(x)-f(\xi)|<\epsilon$. Η δεύτερη γραμμή λέει ότι όλα τα $x\in A$ που ανήκουν στην περιοχή $(\xi-\delta,\xi+\delta)$, εκτός ίσως του $x=\xi$, ικανοποιούν την $|f(x)-f(\xi)|<\epsilon$. Άρα είναι προφανές ότι η πρώτη γραμμή συνεπάγεται την δεύτερη. Όμως, μπορούμε αμέσως να δούμε ότι και η δεύτερη γραμμή συνεπάγεται την πρώτη. Αυτό ισχύει διότι και ο $x=\xi$ ικανοποιεί την $|f(x)-f(\xi)|<\epsilon$, χωρίς να χρειάζεται να το υποθέσουμε. Πράγματι, για $x=\xi$ έχουμε $|f(x)-f(\xi)|=|f(\xi)-f(\xi)|=0<\epsilon$.

Επομένως, αποδείξαμε ότι στην περίπτωση που το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού A τότε η f είναι συνεχής στο ξ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$.

Θα μιλήσουμε τώρα για την έννοια της συνέχειας *στην ειδική περίπτωση των μονότονων συναρτήσεων*.

Ας υποθέσουμε ότι η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο A και $\xi \in A$.

Αν το ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A, τότε, όπως γνωρίζουμε, υπάρχει το $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και είναι ίσο με το supremum του συνόλου τιμών της f αριστερά του ξ:

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) = \sup\{f(x)\,|\,x \in A, x < \xi\}.$$

Επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$ με $x < \xi$, οπότε το $f(\xi)$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{f(x)\,|\,x \in A, x < \xi\}$ και επομένως

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) \leq f(\xi).$$

Αν $\lim_{x\to\xi-} f(x) = f(\xi)$, τότε η f είναι συνεχής στο ξ από αριστερά του ενώ, αν $\lim_{x\to\xi-} f(x) < f(\xi)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο ξ από αριστερά του.

Ανάλογα ισχύουν κι από την δεξιά μεριά του ξ. Αν το ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A, τότε υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και είναι ίσο με το infimum του συνόλου τιμών της f δεξιά του ξ:

$$\lim_{x\to\xi+} f(x) = \inf\{f(x)\,|\,x \in A, \xi < x\}.$$

Επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει $f(\xi) \leq f(x)$ για κάθε $x \in A$ με $\xi < x$, οπότε το $f(\xi)$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{f(x)\,|\,x \in A, \xi < x\}$ και επομένως

$$f(\xi) \leq \lim_{x\to\xi+} f(x).$$

Αν $f(\xi) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$, τότε η f είναι συνεχής στο ξ από δεξιά του ενώ, αν $f(\xi) < \lim_{x\to\xi+} f(x)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο ξ από δεξιά του.

Πριν συνδυάσουμε τα δυο προηγούμενα, ας κάνουμε μερικές συμπληρωματικές παρατηρήσεις.

Επειδή $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \sup\{f(x)\,|\,x \in A, x < \xi\}$, ισχύει $f(x) \leq \lim_{x\to\xi-} f(x)$ για κάθε $x \in A$ με $x < \xi$ και, επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει $f(\xi) \leq f(x)$ για κάθε $x \in A$ με $\xi \leq x$. Άρα στην περίπτωση που είναι $\lim_{x\to\xi-} f(x) < f(\xi)$ ή, ισοδύναμα, που η f δεν είναι συνεχής στο ξ από αριστερά του, τότε το ανοικτό διάστημα $(\lim_{x\to\xi-} f(x), f(\xi))$ δεν περιέχει *καμιά* τιμή της f ενώ αριστερά του και δεξιά του *υπάρχουν* τιμές της f.

Ομοίως, από την άλλη μεριά του ξ, επειδή $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \inf\{f(x)\,|\,x \in A, \xi < x\}$, ισχύει $\lim_{x\to\xi+} f(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \in A$ με $\xi < x$ και, επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$ με $x \leq \xi$. Άρα στην περίπτωση που είναι $f(\xi) < \lim_{x\to\xi+} f(x)$ ή, ισοδύναμα, που η f δεν είναι συνεχής στο ξ από δεξιά του, τότε το ανοικτό διάστημα $(f(\xi), \lim_{x\to\xi+} f(x))$ δεν περιέχει *καμιά* τιμή της f ενώ αριστερά του και δεξιά του *υπάρχουν* τιμές της f.

Βλέπουμε λοιπόν ότι, αν το ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και η f δεν είναι συνεχής στο ξ από αριστερά του, τότε υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα με ένα άκρο του το $f(\xi)$ το οποίο παρεμβάλλεται ανάμεσα στις τιμές της f και το ίδιο δεν περιέχει τιμές της f. Ομοίως, αν το ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και η f δεν είναι συνεχής στο ξ από δεξιά του, τότε υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα με ένα άκρο του το $f(\xi)$ το οποίο παρεμβάλλεται ανάμεσα στις τιμές της f και το ίδιο δεν περιέχει τιμές της f.

Τώρα συνδυάζουμε τα προηγούμενα ως εξής. Αν το ξ είναι αμφίπλευρο (δηλαδή από αριστερά του και από δεξιά του) σημείο συσσώρευσης του A, τότε έχουμε

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) \leq f(\xi) \leq \lim_{x\to\xi+} f(x).$$

Και τώρα έχουμε δυο περιπτώσεις.
Αν τα δυο πλευρικά όρια είναι ίσα, δηλαδή αν $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$, τότε αναγκαστικά θα έχουμε $\lim_{x\to\xi-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$, οπότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ και η f είναι συνεχής στο ξ.
Αν τα δυο πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, δηλαδή αν $\lim_{x\to\xi-} f(x) < \lim_{x\to\xi+} f(x)$, τότε δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και η f δεν είναι συνεχής στο ξ. Τότε η τιμή $f(\xi)$ βρίσκεται κάπου στο διάστημα ανάμεσα στα δυο πλευρικά όρια και μπορεί να ταυτίζεται με το πολύ ένα από αυτά: αν ταυτίζεται με το αριστερό τότε η f είναι συνεχής στο ξ από αριστερά του αλλά όχι από δεξιά του, αν ταυτίζεται με το δεξιό τότε η f είναι συνεχής στο ξ από δεξιά του αλλά όχι από αριστερά του και αν η τιμή $f(\xi)$ είναι γνησίως ανάμεσα στα δυο πλευρικά όρια τότε η f δεν είναι συνεχής στο ξ ούτε από αριστερά του ούτε από δεξιά του. Πάντως, σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα με ένα άκρο του το $f(\xi)$ το οποίο παρεμβάλλεται ανάμεσα στις τιμές της f και το ίδιο δεν περιέχει τιμές της f. Η διαφορά

$$\lim_{x\to\xi+} f(x) - \lim_{x\to\xi-} f(x)$$

ονομάζεται **άλμα** της f στο ξ και είναι θετικός αριθμός.

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν με κατάλληλη προσαρμογή και για φθίνουσες συναρτήσεις.

Για περαιτέρω λεπτομέρειες πάνω σε όλα τα προηγούμενα δείτε την ενότητα 4.1 του βιβλίου.

Επίσης, δεν θα πω πολλά πάνω στις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων, όπως το ότι το άθροισμα και το γινόμενο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις. Θα θεωρήσω αυτές τις ιδιότητες γνωστές από το πιο στοιχειώδες μάθημα του απειροστικού λογισμού. Μπορείτε να τις δείτε αναλυτικά και με διάφορα παραδείγματα στην ενότητα 4.2 του βιβλίου. Θα αποδείξω μόνο τη συνέχεια της σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ (οπότε ορίζεται η σύνθεση $g \circ f : A \to \mathbb{R}$) και $\xi \in A$. Αν η f είναι συνεχής στο ξ και η g είναι συνεχής στο $\eta = f(\xi)$, τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο ξ.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$.
Επειδή η g είναι συνεχής στο $\eta = f(\xi)$, υπάρχει κάποιο $\delta' > 0$ ώστε

$$y \in B, |y - \eta| < \delta' \qquad \Rightarrow \qquad |g(y) - g(\eta)| < \epsilon.$$

Τώρα, επειδή η f είναι συνεχής στο ξ, για το δ' (που μόλις προέκυψε από το ϵ) υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, |x - \xi| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(\xi)| < \delta'.$$

Και τώρα συνδυάζουμε τα προηγούμενα και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x \in A, |x-\xi| < \delta \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - f(\xi)| < \delta' \quad \Rightarrow \quad f(x) \in B, |f(x) - \eta| < \delta' \\ &\Rightarrow \quad |g(f(x)) - g(\eta)| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\xi)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα αποδείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, |x-\xi| < \delta \qquad \Rightarrow \quad |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\xi)| < \epsilon.$$

Άρα η $g \circ f$ είναι συνεχής στο ξ. $\square$