ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΤΡΙΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 11-10-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Άσκηση 1.2.7. *Υπάρχει ελάχιστο ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το κλειστό διάστημα $[a, b]$;*

Λύση: Έστω ότι το (c, d) είναι το μικρότερο ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το $[a, b]$:

$$[a, b] \subseteq (c, d).$$

Τότε $a \in (c, d)$ και $b \in (c, d)$, οπότε

$$c < a \leq b < d.$$

Θεωρούμε τον $c' = \frac{c+a}{2}$ (ή οποιονδήποτε αριθμό ανάμεσα στους c, a) και τον $d' = \frac{b+d}{2}$, οπότε

$$c < c' < a \leq b < d' < d.$$

Τότε

$$[a, b] \subseteq (c', d'), \qquad (c', d') \subsetneq (c, d).$$

Δηλαδή, υπάρχει ανοικτό διάστημα μικρότερο από το (c, d) που κι αυτό περιέχει το $[a, b]$. Άτοπο.
Άρα δεν υπάρχει ελάχιστο ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το κλειστό διάστημα $[a, b]$.

Σχόλιο: Στην ερώτηση αν υπάρχει ελάχιστο κλειστό διάστημα το οποίο περιέχει το κλειστό διάστημα $[a, b]$ η απάντηση είναι προφανώς θετική. Το ελάχιστο τέτοιο διάστημα είναι το ίδιο το $[a, b]$. Προφανώς η απάντηση είναι θετική και στην ερώτηση αν υπάρχει μέγιστο ανοικτό διάστημα το οποίο να περιέχεται στο ανοικτό διάστημα (a, b). Αλλά η απάντηση στην ερώτηση αν υπάρχει μέγιστο κλειστό διάστημα το οποίο να περιέχεται στο ανοικτό διάστημα (a, b) είναι αρνητική και η απόδειξη είναι όμοια με την παραπάνω.

Άσκηση 1.2.10. *Έστω μη-κενό και άνω φραγμένο σύνολο A και $u = \sup A$ (οπότε το u είναι αριθμός).*

(i) *Είναι σωστό ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $(u - \epsilon, u] \cap A \neq \emptyset$;*

(ii) *Είναι σωστό ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $(u - \epsilon, u) \cap A \neq \emptyset$;*

(iii) *Ποιές είναι οι απαντήσεις στα (i), (ii) αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $u \notin A$;*

Λύση: (i) Από την δεύτερη χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum του A γνωρίζουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $u - \epsilon < x \leq u$ ή, ισοδύναμα, $x \in (u - \epsilon, u]$.
Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in (u - \epsilon, u] \cap A$ και, επομένως, $(u - \epsilon, u] \cap A \neq \emptyset$.
Άρα η απάντηση είναι: ναι.

(ii) Το προηγούμενο επιχείρημα εγγυάται ότι υπάρχει $x \in A$ στο διάστημα $(u - \epsilon, u]$. Αυτό το στοιχείο x του A μπορεί να είναι το u και μπορεί να μην υπάρχει άλλο στοιχείο του A στο $(u - \epsilon, u]$ δηλαδή να μην υπάρχει κανένα στοιχείο του A στο $(u - \epsilon, u)$. Γι αυτό υποψιαζόμαστε ότι η απάντηση είναι αρνητική και ψάχνουμε να βρούμε αντιπαράδειγμα.

• Θεωρούμε το μονοσύνολο $A = \{a\}$. Τότε $a = \sup A$ και μπορούμε να βρούμε κάποιον $\epsilon > 0$ (μάλιστα, κάθε $\epsilon > 0$ είναι κατάλληλος) ώστε το διάστημα $(a - \epsilon, a)$ να μην περιέχει κανένα στοιχείο του A, οπότε $(a - \epsilon, a) \cap A = \emptyset$.
Άρα η απάντηση στο ερώτημα είναι: όχι.

• Άλλο αντιπαράδειγμα. Θεωρούμε το σύνολο $A = [a, b] \cup \{c\}$, όπου $a \leq b < c$. Τότε

$c = \sup A$ και μπορούμε να βρούμε κάποιον $\epsilon > 0$, για παράδειγμα οποιονδήποτε ϵ με $0 < \epsilon \leq c - b$, ώστε το διάστημα $(c - \epsilon, c)$ να μην περιέχει κανένα στοιχείο του A, οπότε $(c - \epsilon, c) \cap A = \emptyset$.

(iii) Τώρα υποθέτουμε ότι $u \notin A$. Από την δεύτερη ιδιότητα του supremum του A έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $u - \epsilon < x \leq u$. Επειδή $x \in A$ και $u \notin A$, στην τελευταία σχέση δεν μπορεί να είναι $x = u$, οπότε $u - \epsilon < x < u$ ή, ισοδύναμα, $x \in (u - \epsilon, u)$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in (u - \epsilon, u) \cap A$, οπότε $(u - \epsilon, u) \cap A \neq \emptyset$. Άρα η απάντηση στο ερώτημα (ii) είναι: ναι.
Από τη στιγμή που είναι $(u - \epsilon, u) \cap A \neq \emptyset$ και το $(u - \epsilon, u]$ είναι μεγαλύτερο από το $(u - \epsilon, u)$, θα είναι αυτομάτως και $(u - \epsilon, u] \cap A \neq \emptyset$.
Άρα η απάντηση και στο ερώτημα (i) είναι: ναι.

Άσκηση 1.2.11. *Έστω μη-κενό σύνολο A και $u \in \mathbb{R}$.*

[α] *Αποδείξτε ότι* $\sup A \leq u$ *αν και μόνο αν ισχύει* $x \leq u$ *για κάθε* $x \in A$.

[β] *Αποδείξτε ότι* $u \leq \sup A$ *αν και μόνο αν για κάθε* $\gamma < u$ *υπάρχει* $x \in A$ *ώστε* $\gamma < x$.

Λύση: [α] Έστω $\sup A \leq u$. Έστω τυχόν $x \in A$. Τότε $x \leq \sup A$, οπότε $x \leq u$. Άρα ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$.
Μια ελάχιστα διαφορετική διατύπωση. Έστω $\sup A \leq u$. Επειδή το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A, ο u είναι κι αυτός άνω φράγμα του A. Άρα ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$. Αυτό σημαίνει ότι ο u είναι άνω φράγμα του A. Επειδή το $\sup A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, συνεπάγεται $\sup A \leq u$.
Το αντίστροφο με άλλο τρόπο. Έστω (για άτοπο) ότι $u < \sup A$. Από την δεύτερη ιδιότητα του $\sup A$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in A$ ώστε $u < x \leq \sup A$. Αυτό είναι άτοπο διότι πρέπει να ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$. Άρα $\sup A \leq u$.

[β] Έστω $u \leq \sup A$. Έστω τυχόν $\gamma < u$. Τότε $\gamma < \sup A$, οπότε από τη δεύτερη ιδιότητα του $\sup A$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$. Άρα για κάθε $\gamma < u$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$.
Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\gamma < u$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$. Έστω (για άτοπο) ότι $\sup A < u$. Θεωρούμε $\gamma = \sup A$ (ή οποιονδήποτε γ με $\sup A \leq \gamma < u$). Τότε αυτός ο γ είναι $< u$, οπότε βάσει της υπόθεσης πρέπει να υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$, δηλαδή $\sup A < x$. Αυτό είναι άτοπο. Άρα $u \leq \sup A$.
Το αντίστροφο με λίγο διαφορετική διατύπωση. Τό ότι για κάθε $\gamma < u$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$ σημαίνει ότι κάθε $\gamma < u$ *δεν* είναι άνω φράγμα του A. Όμως, το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A, οπότε δεν μπορεί να ισχύει $\sup A < u$ και, επομένως, ισχύει $u \leq \sup A$.

Άσκηση 1.2.12. *Έστω μη-κενά σύνολα A, B.*

[α] *Αποδείξτε ότι* $\sup A \leq \inf B$ *αν και μόνο αν ισχύει* $x \leq y$ *για κάθε* $x \in A, y \in B$.

[γ] *Έστω ότι ισχύει* $x \leq y$ *για κάθε* $x \in A, y \in B$ *και έστω ότι για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχουν* $x \in A, y \in B$ *ώστε* $y - x < \epsilon$. *Αποδείξτε ότι* $\sup A = \inf B$.

Λύση: [α] Έστω $\sup A \leq \inf B$. Επειδή για κάθε $x \in A, y \in B$ ισχύει $x \leq \sup A$ και $\inf B \leq y$, συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in A, y \in B$ ισχύει $x \leq y$.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A, y \in B$.
Πρώτος τρόπος: Θεωρούμε τυχόν $y \in B$ (και το σταθεροποιούμε *προσωρινά*). Επειδή ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$ συνεπάγεται ότι το y είναι άνω φράγμα του A. Επειδή

το $\sup A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, ισχύει $\sup A \leq y$. Τώρα (αποσταθεροποιώντας το y) έχουμε ότι ισχύει $\sup A \leq y$ για κάθε $y \in B$, οπότε το $\sup A$ είναι κάτω φράγμα του B. Τέλος, επειδή το $\inf B$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του B, συνεπάγεται $\sup A \leq \inf B$.
Δεύτερος τρόπος: Έστω (για άτοπο) $\inf B < \sup A$. Από τη δεύτερη ιδιότητα του $\sup A$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in A$ ώστε $\inf B < x$. Από τη δεύτερη ιδιότητα του $\inf B$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $y \in B$ ώστε $y < x$. Άρα υπάρχουν $x \in A, y \in B$ ώστε $y < x$ και αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A, y \in B$.

[γ] Από την υπόθεση και από το [α] συνεπάγεται $\sup A \leq \inf B$. Άρα μένει να αποδείξουμε ότι $\inf B \leq \sup A$.
Πρώτος τρόπος: Έστω (για άτοπο) ότι $\sup A < \inf B$. Παρατηρήστε ότι αυτό σημαίνει ότι οι $\sup A, \inf B$ είναι και οι δυο αριθμοί (το $\sup A$ δεν μπορεί να είναι $+\infty$ και το $\inf B$ δεν μπορεί να είναι $-\infty$).
Παίρνοντας οποιονδήποτε ϵ με $0 < \epsilon \leq \inf B - \sup A$, βλέπουμε ότι *δεν* υπάρχουν $x \in A, y \in B$ ώστε $y - x < \epsilon$. (Διότι για κάθε $x \in A, y \in B$ ισχύει $x \leq \sup A$ και $\inf B \leq y$, οπότε $y - x \geq \inf B - \sup A \geq \epsilon$.) Αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση του [γ], οπότε $\inf B \leq \sup A$.
Δεύτερος τρόπος: Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με την υπόθεση, υπάρχουν $x \in A, y \in B$ ώστε $y - x < \epsilon$. Επειδή $x \leq \sup A$ και $\inf B \leq y$, συνεπάγεται $\inf B - \sup A \leq y - x < \epsilon$.
Άρα έχουμε ότι ισχύει $\inf B - \sup A < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$. Αυτό, βάσει της πρώτης πρότασης που αποδείξαμε στο μάθημα, συνεπάγεται ότι $\inf B - \sup A \leq 0$ και, επομένως, $\inf B \leq \sup A$.