ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΔΕΚΑΤΟ ΕΚΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 12-11-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ακολουθία (x_n) η οποία συγκλίνει. Δηλαδή

$$x_n \to x$$

για κάποιον αριθμό x. Αυτό φυσικά σημαίνει ότι οι όροι x_n πλησιάζουν τον x (καθώς ο n μεγαλώνει) και, επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και οι διάφοροι όροι x_n και x_m της ακολουθίας πλησιάζουν ο ένας τον άλλον (καθώς οι n, m μεγαλώνουν). Πώς θα το δούμε αυτό με αυστηρό τρόπο; Πώς θα δούμε ότι η απόσταση ανάμεσα στους όρους x_n και x_m θα γίνει όσο θέλουμε μικρή όταν οι n, m γίνουν κατάλληλα μεγάλοι; Παίρνουμε έναν τυχόντα $\epsilon > 0$ και σκεφτόμαστε ότι για να γίνει η απόσταση ανάμεσα στους x_n και x_m μικρότερη από ϵ αρκεί να γίνει η απόσταση καθενός από τους x_n και x_m από τον x μικρότερη από $\frac{\epsilon}{2}$. Οπότε, αφού ξέρουμε ότι $x_n \to x$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει κάποιος n_0 ώστε να ισχύει

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Τώρα, αλλάζοντας το σύμβολο του δείκτη από n σε m, έχουμε ότι ισχύει

$$|x_m - x| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } m \geq n_0.$$

Άρα ισχύει

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{και} \quad |x_m - x| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Προσθέτοντας και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι ισχύει

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) - (x_m - x)| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|x_n - x_m| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Αυτό ακριβώς θέλαμε να αποδείξουμε. Και τώρα αυτό ακριβώς (δηλαδή το συμπέρασμα) θα το βαφτίσουμε *ορισμό* μιας ειδικής ιδιότητας των ακολουθιών.

Λέμε ότι μια ακολουθία (x_n) είναι **ακολουθία Cauchy** αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|x_n - x_m| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Με άλλα λόγια, μια ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy αν οι όροι της πλησιάζουν ο ένας τον άλλο (όταν οι δείκτες τους μεγαλώνουν).

Αυτό που κάναμε πριν δώσουμε τον ορισμό της ακολουθίας Cauchy είναι ότι αποδείξαμε την Πρόταση 2.17 του βιβλίου, δηλαδή την

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν μια ακολουθία συγκλίνει, τότε είναι ακολουθία Cauchy.*

Τώρα θα αποδείξουμε το αντίστροφο αυτής της Πρότασης.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ CAUCHY. *Αν μια ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy, τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω ότι η ακολουθία (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιος αριθμός x ώστε η (x_n) να συγκλίνει στον x.

Σκέψεις:
Τώρα το πρόβλημα που έχουμε είναι πολύ πιο δύσκολο από το πρόβλημα στην απόδειξη της προηγούμενης Πρότασης. Στην προηγούμενη Πρόταση γνωρίζουμε ότι οι όροι της ακολουθίας, παρά το ότι είναι μεταβλητοί, πλησιάζουν έναν δοσμένο σταθερό αριθμό και βγάζουμε αμέσως το προφανές συμπέρασμα ότι οι μεταβλητοί αυτοί όροι πλησιάζουν ο ένας τον άλλον. Στην παρούσα κατάσταση γνωρίζουμε ότι οι μεταβλητοί όροι πλησιάζουν ο ένας τον άλλο, αλλά δεν είναι προφανές ότι αυτοί θα πλησιάζουν κάποιον σταθερό αριθμό. Και το μεγαλύτερο πρόβλημα είναι ότι δεν υπάρχει κάποιος δοσμένος αριθμός ώστε να αποδείξουμε ότι οι όροι της ακολουθίας πλησιάζουν αυτόν τον αριθμό.
Πίσω στην απόδειξη:

Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι η (x_n) είναι φραγμένη.
Εφαρμόζουμε τον ορισμό της ακολουθίας Cauchy με έναν οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, για παράδειγμα τον $\epsilon = 1$, και βρίσκουμε ότι υπάρχει κάποιος n_0 ώστε να ισχύει

$$|x_n - x_m| < 1 \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0.$$

(Μπορούμε να δουλέψουμε και με $\epsilon = 2$ ή $\epsilon = \frac{1}{2}$ ή οποιονδήποτε άλλον $\epsilon > 0$.)
Αφού αυτό ισχύει για κάθε $n, m \geq n_0$ θα ισχύει για $m = n_0$ και για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή ισχύει

$$|x_n - x_{n_0}| < 1 \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Άρα ισχύει

$$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}| \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Αυτό λέει ότι οι όροι

$$x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots \qquad \text{κλπ}$$

βρίσκονται όλοι μέσα στο διάστημα

$$[-(1 + |x_{n_0}|), 1 + |x_{n_0}|].$$

Άρα έξω από αυτό το διάστημα είναι το πολύ κάποιοι από τους αρχικούς όρους

$$x_1, \ldots, x_{n_0-1}$$

και, επειδή αυτοί είναι πεπερασμένοι, μπορούμε να μεγαλώσουμε το διάστημα αυτό ώστε να συμπεριλάβουμε όλους τους όρους της (x_n) μέσα σε ένα κατάλληλο φραγμένο διάστημα. Άρα η (x_n) είναι φραγμένη.
Και τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass για να συμπεράνουμε ότι η (x_n) έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Παίρνουμε μια τέτοια υποακολουθία (x_{n_k}) και το όριό της, έστω τον αριθμό x, οπότε

$$x_{n_k} \to x.$$

Σκέψεις:
Σ' αυτό ακριβώς το σημείο της απόδειξης εμφανίζεται για πρώτη φορά ένας σταθερός αριθμός x. Τώρα έχουμε ένα υποψήφιο όριο της ακολουθίας. Γιατί είναι *αυτός ειδικά* ο

αριθμός x το υποψήφιο όριο της (x_n). Μα είναι απλό. Αν η ακολουθία (x_n) έχει κάποιο όριο, τότε αυτό πρέπει να είναι όριο και της συγκεκριμένης υποακολουθίας (x_{n_k}) και, επομένως, πρέπει να είναι ο x.
Πίσω στην απόδειξη:

Θα αποδείξουμε ότι
$$x_n \to x.$$

Έστω $\epsilon > 0$.
Επειδή η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, υπάρχει κάποιος n_0 ώστε να ισχύει
$$|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0. \tag{1}$$

Και επειδή $x_{n_k} \to x$, από κάποιον k και πέρα (μην ξεχνάμε ότι ο δείκτης της υποακολουθίας είναι ο k) ισχύει
$$|x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ακόμη, επειδή $n_k \to +\infty$, από κάποιον k και πέρα ισχύει
$$n_k \geq n_0.$$

Άρα από κάποιον k και πέρα ισχύει
$$|x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{και} \qquad n_k \geq n_0.$$

Ας θεωρήσουμε έναν τέτοιον k, δηλαδή έναν k για τον οποίο ισχύει $|x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2}$ και $n_k \geq n_0$. Τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον $m = n_k$ στην σχέση (1) και έτσι έχουμε ότι ισχύει
$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Αλλά έχουμε επίσης ότι $|x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2}$ και έτσι ισχύει
$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος n_0 ώστε να ισχύει
$$|x_n - x| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Άρα $x_n \to x$. □

Παράδειγμα. Θεωρούμε την ακολουθία
$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 1 + \frac{1}{2}, \\ x_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \\ x_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \\ x_5 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

και, γενικότερα,
$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Θα δούμε ότι η ακολουθία (x_n) δεν είναι ακολουθία Cauchy.
Πράγματι, έχουμε

$$x_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Επομένως,

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n\,\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι ενώ οι δείκτες n και $2n$ μπορούν να γίνουν απεριόριστα μεγάλοι η απόσταση των όρων x_n και x_{2n} δεν γίνεται όσο θέλουμε μικρή: δεν μπορεί να γίνει μικρότερη από $\frac{1}{2}$. Άρα η (x_n) δεν είναι ακολουθία Cauchy.
Τώρα, αυτό μας λέει ότι η (x_n) δεν συγκλίνει: αν συνέκλινε, τότε θα ήταν ακολουθία Cauchy.
Ναι, αλλά η (x_n) είναι προφανώς αύξουσα, οπότε γνωρίζουμε ότι *έχει όριο* το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$. Επειδή το όριο δεν μπορεί να είναι αριθμός, καταλήγουμε στο ότι

$$x_n \to +\infty.$$

Τώρα θα εξετάσουμε μια νέα έννοια, την έννοια του *υποακολουθιακού ορίου ακολουθίας*.

Λέμε ότι το $x \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι **υποακολουθιακό όριο** της ακολουθίας (x_n) αν το x είναι το όριο κάποιας υποακολουθίας της (x_n), δηλαδή αν υπάρχει κάποια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) ώστε $x_{n_k} \to x$.

Παράδειγμα. Αν μια ακολουθία (x_n) έχει όριο x, τότε αυτό είναι το μοναδικό υποακολουθιακό όριό της.
Πράγματι, *κάθε* υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) έχει όριο x.

Παράδειγμα. Η γνωστή μας ακολουθία (x_n) με όρους

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots \qquad \text{κλπ}$$

έχει υποακολουθιακά όρια τους αριθμούς -1 και 1, αφού η υποακολουθίες των άρτιων και των περιττών δεικτών έχουν αυτά τα δυο όρια.
Και τώρα σκεφτόμαστε μήπως υπάρχουν και άλλα υποακολουθιακά όρια της ίδιας ακολουθίας.
Ας υποθέσουμε ότι το $x \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n), δηλαδή ότι $x_{n_k} \to x$ για κάποια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n). Μα το συμπέραμα της άσκησης 2.5.7 που λύσαμε στο προηγούμενο μάθημα είναι ότι $x = -1$ ή $x = 1$.
Άρα τα μοναδικά υποακολουθιακά όρια της (x_n) είναι οι -1 και 1.

Τα συμπεράσματα του Θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass και της Πρότασης 2.16 του βιβλίου συνοψίζονται ως εξής:

Κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον ένα υποακολουθιακό όριο.

Πράγματι. Αν η (x_n) είναι φραγμένη, τότε έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία η οποία έχει όριο αριθμό και τότε αυτός ο αριθμός είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n). Αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία η οποία έχει όριο $+\infty$ και τότε το $+\infty$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n). Και, τέλος, αν η (x_n)

δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία η οποία έχει όριο $-\infty$ και τότε το $-\infty$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n). Άρα σε κάθε περίπτωση η (x_n) έχει υποακολουθιακό όριο κάποιο στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$.

Και τώρα έχουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα. Το Θεώρημα 2.2 του βιβλίου.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε ακολουθία έχει ένα μέγιστο υποακολουθιακό όριο και ένα ελάχιστο υποακολουθιακό όριο.*

Δεν θα αποδείξουμε εδώ αυτό το Θεώρημα. Διαβάστε εσείς την απόδειξη. (Το γενικό σχήμα της απόδειξης έχει ως εξής. Θεωρούμε μια ακολουθία και το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της. Αυτό το σύνολο είναι μη-κενό, αφού η ακολουθία έχει τουλάχιστον ένα υποακολουθιακό όριο. Κατόπιν θεωρούμε το supremum και το infimum αυτού του συνόλου και αποδεικνύουμε ότι είναι *στοιχεία του συνόλου*, δηλαδή ότι είναι το μέγιστο και το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου, δηλαδή ότι είναι το μέγιστο και το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο της ακολουθίας.)

Το μέγιστο υποακολουθιακό όριο μιας ακολουθίας (x_n) το ονομάζουμε και **ανώτερο όριο** της ακολουθίας και το συμβολίζουμε

$$\limsup x_n \qquad \text{ή} \qquad \overline{\lim}\, x_n.$$

Και το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n) το ονομάζουμε και **κατώτερο όριο** της ακολουθίας και το συμβολίζουμε

$$\liminf x_n \qquad \text{ή} \qquad \underline{\lim}\, x_n.$$

Σύμφωνα με τα πρώτο παράδειγμα που είδαμε προηγουμένως, αν η (x_n) έχει όριο x, τότε

$$\liminf x_n = \limsup x_n = x.$$

Και σύμφωνα με το δεύτερο παράδειγμα,

$$\liminf(-1)^{n-1} = -1, \qquad \limsup(-1)^{n-1} = 1.$$