ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΕΙΚΟΣΤΟ ΕΝΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 12-12-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού ορίου με χρήση της συνέχειας της σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων.

Παράδειγμα. Θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} e^{x^2+x+1},$$

αν υπάρχει.
Έχουμε τις συναρτήσεις

$$y = f(x) = x^2 + x + 1, \qquad z = g(y) = e^y.$$

Τότε η συνάρτηση

$$z = h(x) = e^{x^2+x+1}$$

είναι η σύνθεση των g και f:

$$z = h(x) = e^{x^2+x+1} = e^{f(x)} = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Τώρα, η f είναι συνεχής στο $x = 0$ και η g είναι συνεχής στο $y = 1 = f(0)$. Άρα η h είναι συνεχής στο $x = 0$, οπότε

$$\lim_{x\to 0} e^{x^2+x+1} = \lim_{x\to 0} h(x) = h(0) = e.$$

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} e^{x \sin \frac{1}{x}}.$$

Το προηγούμενο επιχείρημα δεν ισχύει τώρα, διότι η συνάρτηση $x \sin \frac{1}{x}$ και κατ' επέκταση η $e^{x \sin \frac{1}{x}}$ δεν είναι καν ορισμένες στο $x = 0$.
Για να βρούμε το όριο χρησιμοποιούμε την Πρόταση 4.10 του βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ (οπότε ορίζεται η σύνθεση $g \circ f : A \to \mathbb{R}$) και σημείο συσσώρευσης ξ του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in B$ και η g είναι συνεχής στο η, τότε $\lim_{x\to\xi}(g \circ f)(x) = g(\eta)$.*
Με άλλα λόγια:

$$\lim_{x\to\xi} g(f(x)) = g(\lim_{x\to\xi} f(x)).$$

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$.
Επειδή η g είναι συνεχής στο $\eta = f(\xi)$, υπάρχει κάποιο $\delta' > 0$ ώστε

$$y \in B, |y - \eta| < \delta' \qquad \Rightarrow \qquad |g(y) - g(\eta)| < \epsilon.$$

Επειδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, για το δ' (που μόλις προέκυψε από το ϵ) υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, 0 < |x - \xi| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - \eta| < \delta'.$$

Τώρα συνδυάζουμε τα προηγούμενα και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x \in A, 0 < |x - \xi| < \delta \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - \eta| < \delta' \quad \Rightarrow \quad f(x) \in B, |f(x) - \eta| < \delta' \\ &\Rightarrow \quad |g(f(x)) - g(\eta)| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |(g \circ f)(x) - g(\eta)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα αποδείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A, 0 < |x - \xi| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |(g \circ f)(x) - g(\eta)| < \epsilon.$$

Άρα $\lim_{x\to\xi}(g \circ f)(x) = g(\eta)$. □

Τώρα στο παράδειγμά μας, επειδή $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ (αυτό αποδεικνύεται εύκολα με την ιδιότητα παρεμβολής, αφού $-|x| \le x\sin\frac{1}{x} \le |x|$) και επειδή η $z = g(y) = e^y$ είναι συνεχής στο $y = 0$, συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x\to 0} e^{x\sin\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Αν θέλουμε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη Πρόταση για τη σύνθεση συνεχών συναρτήσεων ως εξής. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$y = f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

η οποία ορίζεται και στο 0 και είναι συνεχής και στο 0, αφού

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0).$$

Τώρα έχουμε τη σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $y = f(x)$ και $z = g(y) = e^y$ και

$$\lim_{x\to 0} e^{x\sin\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} (g\circ f)(x) = (g\circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = 1.$$

Υπάρχουν βέβαια περιπτώσεις όπου δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση για την συνέχεια της σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων και τότε χρειάζεται η τελευταία Πρόταση. Δείτε παραδείγματα στο βιβλίο.

Και τώρα διατυπώνουμε απλώς το Θεώρημα 4.1 του βιβλίου. Δεν θα κάνω την απόδειξή του. Είναι παρόμοια με την απόδειξη του παρόμοιου Θεωρήματος για τη σχέση ανάμεσα σε όρια συναρτήσεων και σε όρια ακολουθιών.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Η f είναι συνεχής στο ξ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \to \xi$ ισχύει $f(x_n) \to f(\xi)$.*

Παράδειγμα. Το όριο ακολουθίας $\left(e^{\frac{1}{n^2}}\right)$, όπου το n τείνει στο $+\infty$ παίρνοντας μόνο ακέραιες τιμές, υπολογίζεται ως εξής. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$y = f(x) = e^x,$$

η οποία είναι συνεχής στο $x = 0$ και, επειδή $\frac{1}{n^2} \to 0$, συνεπάγεται

$$e^{\frac{1}{n^2}} \to e^0 = 1.$$

Και ερχόμαστε στα τρία βασικά Θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΦΡΑΓΜΕΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ. *Κάθε συνάρτηση συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι φραγμένη στο διάστημα αυτό.*

Απόδειξη. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. θα αποδείξουμε ότι η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, δηλαδή ότι υπάρχει αριθμός $M \ge 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x)| \le M \qquad \text{για κάθε } x \in [a,b].$$

Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[a,b]$. Δηλαδή για κάθε $M \geq 0$ υπάρχει κάποιο αντίστοιχο $x \in [a,b]$ ώστε $|f(x)| > M$.
Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει αντίστοιχο $x_n \in [a,b]$ ώστε

$$|f(x_n)| > n.$$

Έτσι προκύπτει ακολουθία (x_n) στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $|f(x_n)| > n$ για κάθε n και, επομένως,

$$|f(x_n)| \to +\infty. \tag{1}$$

Μια σκέψη: Δεν μπορούμε να ξέρουμε αν η ακολουθία (x_n) στο $[a,b]$ συγκλίνει, αλλά ας κάνουμε την υπόθεση ότι η (x_n) συγκλίνει για να δούμε που θα καταλήξουμε.
Έστω λοιπόν ότι $x_n \to \xi$ για κάποιο ξ. Επειδή ισχύει $a \leq x_n \leq b$ για κάθε n, συνεπάγεται $a \leq \xi \leq b$, οπότε $\xi \in [a,b]$. Άρα η f είναι συνεχής στο ξ και, επομένως, $f(x_n) \to f(\xi)$. Άρα $|f(x_n)| \to |f(\xi)|$, οπότε λόγω μοναδικότητας ορίου πρέπει να είναι $|f(\xi)| = +\infty$ το οποίο είναι άτοπο.
Το πρόβλημα είναι ότι η (x_n) μπορεί να μην συγκλίνει αλλά μας σώζει το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass. Και τώρα συνεχίζουμε κανονικά την απόδειξη.

Σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \to \xi.$$

Επειδή ισχύει $a \leq x_{n_k} \leq b$ για κάθε k, συνεπάγεται $a \leq \xi \leq b$. Επειδή $\xi \in [a,b]$, η f είναι συνεχής στο ξ, οπότε από το $x_{n_k} \to \xi$ συνεπάγεται $f(x_{n_k}) \to f(\xi)$ και, επομένως,

$$|f(x_{n_k})| \to |f(\xi)|. \tag{2}$$

Όμως, από την (1) έχουμε

$$|f(x_{n_k})| \to +\infty \tag{3}$$

και από τις (2) και (3) καταλήγουμε σε άτοπο. □

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ - ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ. *Κάθε συνάρτηση συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό.*

Απόδειξη. Τώρα υποθέτουμε ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν $\xi, \eta \in [a,b]$ ώστε να ισχύει

$$f(\eta) \leq f(x) \leq f(\xi) \qquad \text{για κάθε } x \in [a,b].$$

Εδώ θα ασχοληθούμε με την απόδειξη της ύπαρξης του ξ.
Θεωρούμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$Y = \{f(x) \,|\, x \in [a,b]\}.$$

Το Y είναι μη-κενό και, λόγω του Θεωρήματος Φραγμένης Συνάρτησης, είναι φραγμένο. Άρα το $u = \sup Y$ είναι αριθμός. Θα αποδείξουμε ότι το u είναι στοιχείο του Y, οπότε το u θα είναι το μέγιστο στοιχείο του Y, δηλαδή η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.
Από την δεύτερη ιδιότητα του supremum, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει στοιχείο του Y ανάμεσα στους $u - \frac{1}{n}$ και u. Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει αντίστοιχο $x_n \in [a,b]$ ώστε

$$u - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq u.$$

Άρα προκύπτει ακολουθία (x_n) στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $u - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq u$ για κάθε n, οπότε

$$f(x_n) \to u. \tag{4}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \to \xi.$$

Επειδή ισχύει $a \leq x_{n_k} \leq b$ για κάθε k, συνεπάγεται $a \leq \xi \leq b$, οπότε η f είναι συνεχής στο ξ. Άρα από το $x_{n_k} \to \xi$ συνεπάγεται

$$f(x_{n_k}) \to f(\xi). \tag{5}$$

Λόγω της (4) συνεπάγεται

$$f(x_{n_k}) \to u \tag{6}$$

και από τις (5) και (6) έχουμε

$$f(\xi) = u.$$

Τώρα, το $u = \sup Y$ είναι άνω φράγμα του Y οπότε ισχύει $f(x) \leq u$ για κάθε $x \in [a,b]$ και, επομένως, ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Με τον ίδιο τρόπο, από το infimum του $Y = \{f(x) \,|\, x \in [a,b]\}$, προκύπτει ο η. $\square$