ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 13-12-13

Μ. Παπαδημητράκης.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και αριθμός λ τέτοιος ώστε $f(a)\le\lambda\le f(b)$ ή $f(b)\le\lambda\le f(a)$. Τότε υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=\lambda$.*

Απόδειξη. Έστω
$$f(a)\le\lambda\le f(b).$$
Θεωρούμε το σύνολο
$$X=\{x\,|\,a\le x\le b, f(x)\le\lambda\}.$$
Το X είναι μη-κενό διότι $a\in X$. Επίσης, $X\subseteq[a,b]$, οπότε το X είναι και άνω φραγμένο. Άρα το $\sup X$ είναι αριθμός και έστω
$$\xi=\sup X.$$
Κατ' αρχάς, επειδή $a\in X$, συνεπάγεται $a\le\xi$ και, επειδή ισχύει $x\le b$ για κάθε $x\in X$, συνεπάγεται ότι το b είναι άνω φράγμα του X και άρα $\xi\le b$. Άρα $\xi\in[a,b]$.
Θα αποδείξουμε ότι $f(\xi)=\lambda$, αποκλείοντας τις περιπτώσεις $f(\xi)>\lambda$ και $f(\xi)<\lambda$.
Έστω $f(\xi)>\lambda$. Τότε, προφανώς, $\xi\ne a$ (αφού $f(a)\le\lambda$), οπότε $a<\xi\le b$. Επειδή $f(\xi)>\lambda$ και επειδή η f είναι συνεχής στο ξ, συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x)>\lambda$ κοντά στο ξ. Άρα υπάρχει κάποιο c τέτοιο ώστε $a<c<\xi$, αρκετά κοντά στο ξ, και ώστε να ισχύει $f(x)>\lambda$ για κάθε $x\in(c,\xi]$. Από την χαρακτηριστική ιδιότητα του $\xi=\sup X$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $x\in X$ ώστε $x\in(c,\xi]$, οπότε γι αυτό το x θα ισχύει $f(x)\le\lambda$. Άτοπο, διότι είπαμε ότι για κάθε $x\in(c,\xi]$ ισχύει $f(x)>\lambda$.
Τώρα, έστω $f(\xi)<\lambda$. Τότε $\xi\ne b$ (αφού $\lambda\le f(b)$), οπότε $a\le\xi<b$. Επειδή $f(\xi)<\lambda$ και επειδή η f είναι συνεχής στο ξ, συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x)<\lambda$ κοντά στο ξ. Άρα υπάρχει κάποιο c τέτοιο ώστε $\xi<c<b$, αρκετά κοντά στο ξ, και ώστε να ισχύει $f(x)<\lambda$ για κάθε $x\in[\xi,c)$. Τώρα, κάθε $x\in[a,b]$ με $f(x)\le\lambda$ περιέχεται στο X και άρα είναι $\le\xi$. Άρα για κάθε $x\in(\xi,b]$ πρέπει να ισχύει $f(x)>\lambda$. Άτοπο, διότι για κάθε $x\in[\xi,c)$ ισχύει $f(x)<\lambda$.
Η απόδειξη είναι όμοια στην περίπτωση $f(b)\le\lambda\le f(a)$. $\square$

Πόρισμα του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής είναι το:

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BOLZANO. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Αν $f(a)f(b)<0$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση στο (a,b).*

Απόδειξη. Από $f(a)f(b)<0$ συνεπάγεται $f(a)<0<f(b)$ ή $f(b)<0<f(a)$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής με $\lambda=0$ και έχουμε λύση $\xi\in[a,b]$ της $f(x)=0$.
Επειδή $f(a)\ne0$ και $f(b)\ne0$, το ξ ανήκει στο (a,b). $\square$

Αποδείξαμε το θεώρημα του Bolzano βάσει του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής. Μπορούμε, όμως, να κάνουμε και το αντίστροφο.
Πράγματι, έστω ότι ισχύει το θεώρημα του Bolzano και έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και έστω $f(a)\le\lambda\le f(b)$ ή $f(b)\le\lambda\le f(a)$.
Αν $\lambda=f(a)$ ή $\lambda=f(b)$, τότε υπάρχει προφανής λύση της εξίσωσης $f(x)=\lambda$: ο a ή ο b, αντιστοίχως.
Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $f(a)<\lambda<f(b)$ ή $f(b)<\lambda<f(a)$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με τύπο
$$g(x)=f(x)-\lambda.$$

Η g είναι συνεχής στο $[a,b]$ και είναι $g(a) < 0 < g(b)$ ή $g(b) < 0 < g(a)$. Άρα $g(a)g(b) < 0$, οπότε από το Θεώρημα Bolzano συνεπάγεται ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει λύση στο (a,b) και, επομένως, και η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει λύση στο (a,b).
Άρα αποδείξαμε το θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής.
Επομένως, *το θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής και το Θεώρημα του Bolzano είναι ισοδύναμα.*

Τώρα θα δούμε δυο ακόμη πορίσματα του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω f συνεχής σε διάστημα I. Αν ένας αριθμός είναι ανάμεσα σε δυο τιμές της f στο I, τότε κι αυτός είναι τιμή της f στο I.*

Απόδειξη. Έστω $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ για κάποια $a, b \in I$. Επειδή το I είναι διάστημα, το διάστημα $[a,b]$ ή $[b,a]$ είναι υποσύνολο του I, οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Άρα υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ή $[b,a]$ και, επομένως, $\xi \in I$ ώστε $f(\xi) = \lambda$ και έτσι ο λ είναι τιμή της f στο I. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΠΡΟΣΗΜΟΥ. *Έστω f συνεχής στο διάστημα I. Αν η f δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του I, τότε η f είναι είτε θετική σε ολόκληρο το I είτε αρνητική σε ολόκληρο το I.*

Απόδειξη. Αν δεν ισχύει το συμπέρασμα, υπάρχουν $a, b \in I$ ώστε $f(a) < 0 < f(b)$. Δηλαδή το 0 είναι ανάμεσα σε δυο τιμές της f στο I, οπότε, σύμφωνα με την αμέσως προηγούμενη Πρόταση, το 0 είναι κι αυτό τιμή της f στο I. Άτοπο. □

Παρατήρηση: Είναι σημαντικό να καταλάβουμε τον ρόλο της συνέχειας σε αυτά τα συμπεράσματα.
Αν έχουμε μια συνάρτηση f ορισμένη σε κάποιο διάστημα I (και δεν είναι αναγκαστικά συνεχής στο I) η οποία δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του I, τότε το μόνο που μπορούμε να συμπεράνουμε είναι ότι για κάποια $x \in I$ θα ισχύει $f(x) < 0$ και για τα υπόλοιπα $x \in I$ θα ισχύει $f(x) > 0$.
Αν όμως έχουμε μια συνάρτηση f ορισμένη σε κάποιο διάστημα I η οποία δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του I και γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής στο I, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είτε για κάθε $x \in I$ θα ισχύει $f(x) < 0$ είτε για κάθε $x \in I$ θα ισχύει $f(x) > 0$.

Ως εφαρμογή του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής μπορούμε να αποδείξουμε το γνωστό από παλιά Θεώρημα ύπαρξης n-οστής ρίζας και μάλιστα στην γενική περίπτωση και όχι μόνο για $n = 2$.

Παράδειγμα. *Η εξίσωση $x^n = y$ με $y \geq 0$ έχει μοναδική λύση $x \geq 0$.*
Για να το αποδείξουμε θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = x^n,$$

η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Θεωρούμε τον

$$b = \max\{y, 1\},$$

οπότε $b \geq 1$ και $b \geq y$ και, επομένως, $b^n \geq b \geq y$.
Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής στο διάστημα $[0,b]$ και στη συνάρτηση $f(x) = x^n$. Επειδή $f(0) = 0 \leq y$ και $f(b) = b^n \geq y$, συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in [0,b]$ ώστε $f(\xi) = y$, δηλαδή $\xi^n = y$.
Η μοναδικότητα της λύσης της εξίσωσης $x^n = y$ προκύπτει από το ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Παράδειγμα. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση

$$x^5 + 4x^4 - 7x^2 - 18x + 5 = 0$$

έχει τουλάχιστον μια λύση.
θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση

$$f(x) = x^5 + 4x^4 - 7x^2 - 18x + 5.$$

Βρίσκουμε μόνοι μας a, b ώστε $a < b$ και ο 0 να είναι ανάμεσα στις τιμές $f(a), f(b)$. Δοκιμάζουμε λίγο - πολύ στην τύχη: $f(0) = 5 > 0$, $f(1) = -15 < 0$. Άρα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f(\xi) = 0$.
Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής. Επειδή $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, υπάρχει αρκετά μεγάλος αρνητικός a (δεν είναι ανάγκη να βρούμε συγκεκριμένη τιμή) ώστε $f(a) < 0$. Επίσης, επειδή $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχει αρκετά μεγάλος θετικός b ώστε $f(b) > 0$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.
Από την υπολογιστική άποψη ο πρώτος τρόπος είναι προτιμώτερος, διότι μας επιτρέπει να εντοπίσουμε την λύση της εξίσωσης μέσα σε κάποιο *συγκεκριμένο* διάστημα. Μάλιστα, όσο μικρότερο είναι αυτό το διάστημα τόσο καλύτερο είναι το αποτέλεσμα από την υπολογιστική πάντα άποψη.