ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΕΚΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 14-1-14

Μ. Παπαδημητράκης.

Τις διάφορες απλές ιδιότητες των παραγώγων θα τις θεωρήσω γνωστές από πιο στοιχειώδη μαθήματα απειροστικού λογισμού και από το λύκειο.

Τώρα έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Το ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού μεγίστου** της f αν η τιμή $f(\xi)$ είναι μεγαλύτερη ή ίση των τιμών της f κοντά στο ξ, δηλαδή αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A \cap (\xi - \delta, \xi + \delta)$. Ομοίως για **σημείο τοπικού ελαχίστου**. Το ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού ακροτάτου** της f αν είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου.

Είναι προφανές ότι, αν σε κάποιο σημείο μια συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή, οπότε αυτό χαρακτηρίζεται **σημείο (ολικού) μεγίστου**, τότε αυτό είναι και σημείο τοπικού μεγίστου. Ομοίως, αν σε κάποιο σημείο μια συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή, οπότε αυτό χαρακτηρίζεται **σημείο (ολικού) ελαχίστου**, τότε αυτό είναι και σημείο τοπικού ελαχίστου.

Το επόμενο ονομάζεται Θεώρημα του Fermat.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω ότι το $\xi \in A$ είναι αμφίπλευρο σημείο συσσώρευσης του A και σημείο τοπικού ακροτάτου της $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η f έχει παράγωγο στο ξ, τότε $f'(\xi) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει η $f'(\xi)$. Επειδή το ξ είναι αμφίπλευρο σημείο συσσώρευσης του A, έχουμε

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \quad \text{και} \quad f'(\xi) = \lim_{x \to \xi-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Τώρα έστω ότι το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f.
Τότε για x κοντά στο ξ από δεξιά του ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ και $x > \xi$, οπότε

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0 \qquad \text{για } x \text{ κοντά στο } \xi \text{ από δεξιά του.}$$

Άρα

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0.$$

Για x κοντά στο ξ από αριστερά του ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ και $x < \xi$, οπότε

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0 \qquad \text{για } x \text{ κοντά στο } \xi \text{ από αριστερά του.}$$

Άρα

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0.$$

Άρα

$$f'(\xi) = 0.$$

Αν το ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου, τότε ισχύουν τα προηγούμενα με ≥ 0 αντί ≤ 0 και αντιστρόφως. □

Το παράδειγμα της συνάρτησης $f(x) = |x|$ δείχνει ότι μπορεί ένα ξ (το $\xi = 0$ στο παράδειγμα) να είναι σημείο τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης και η συνάρτηση να μην έχει παράγωγο στο ξ.

Το θεώρημα του Fermat λέει ότι, αν η f έχει παράγωγο σε σημείο τοπικού ακροτάτου της το οποίο είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο αντίστοιχο σημείο του γραφήματός της είναι οριζόντια. Συνήθως, το θεώρημα του Fermat εφαρμόζεται με συνάρτηση f ορισμένη σε *διάστημα* A. Τότε ο ξ πρέπει να είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος ώστε να είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του διαστήματος. Αν το ξ είναι μονόπλευρο σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού A (για παράδειγμα, αν το A είναι διάστημα και το ξ είναι άκρο του A), τότε είναι φανερό από την παραπάνω απόδειξη (κρατώντας μόνο το μισό μέρος της απόδειξης) ότι, αν υπάρχει η $f'(\xi)$, αυτή θα είναι ≥ 0 ή ≤ 0 ανάλογα με την περίπτωση, αλλά δεν μπορούμε να συμπεράνουμε γενικά ότι $f'(\xi) = 0$.

Πάμε στο Θεώρημα του Rolle.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b). Αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.*

Απόδειξη. *Πρώτη περίπτωση:* Έστω ότι η f είναι σταθερή στο $[a, b]$. Τότε ισχύει $f'(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in (a, b)$.

Δεύτερη περίπτωση: Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή στο $[a, b]$. Τότε είτε (i) η f έχει μια τουλάχιστον τιμή $> f(a) = f(b)$ είτε (ii) η f έχει μια τουλάχιστον τιμή $< f(a) = f(b)$. Εξετάζουμε τις δυο περιπτώσεις ξεχωριστά.

(i) Σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής, υπάρχει $\xi \in [a, b]$ το οποίο είναι σημείο ολικού μεγίστου της f. Αφού υπάρχει τιμή της f μεγαλύτερη από $f(a) = f(b)$, συνεπάγεται $f(\xi) > f(a) = f(b)$, οπότε $\xi \in (a, b)$. Βάσει της υπόθεσης, υπάρχει η $f'(\xi)$ και, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, $f'(\xi) = 0$.

(ii) Σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής, υπάρχει $\xi \in [a, b]$ το οποίο είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f. Αφού υπάρχει τιμή της f μικρότερη από $f(a) = f(b)$, συνεπάγεται $f(\xi) < f(a) = f(b)$, οπότε $\xi \in (a, b)$. Βάσει της υπόθεσης, υπάρχει η $f'(\xi)$ και, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, $f'(\xi) = 0$. □

Το θεώρημα του Rolle λέει ότι, με τις κατάλληλες υποθέσεις, αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι οριζόντια.

Τώρα έχουμε τα δυο Θεωρήματα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού (υπάρχουν και τα Θεωρήματα Μέσης Τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού). Το πιο συνηθισμένο είναι συνδεδεμένο με το όνομα του Lagrange και το άλλο με το όνομα του Cauchy.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b). Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$F(x) = (b - a)f(x) - (f(b) - f(a))x.$$

Η F είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο

$$F'(x) = (b - a)f'(x) - (f(b) - f(a)).$$

Βλέπουμε εύκολα ότι

$$F(a) = bf(a) - af(b), \qquad F(b) = bf(a) - af(b).$$

Άρα $F(a) = F(b)$ και από το Θεώρημα του Rolle συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $F'(\xi) = 0$, οπότε $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange που μόλις είδαμε λέει ότι, με τις κατάλληλες υποθέσεις, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να έχει ίδια κλίση (οπότε να είναι παράλληλη) με την ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω f, g συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b). Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$H(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Η H είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) με παράγωγο

$$H'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x).$$

Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι

$$H(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a), \qquad F(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a),$$

οπότε $H(a) = H(b)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $H'(\xi) = 0$ και, επομένως, συνεπάγεται ότι $(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$. □

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα του Rolle είναι απλή εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Lagrange και ότι το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange είναι απλή εφαρμογή (με τη συνάρτηση $g(x) = x$) του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Cauchy. Από την άλλη μεριά, το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy αποδείχτηκε ως εφαρμογή του Θεωρήματος του Rolle. Συμπεραίνουμε ότι *τα τρία θεωρήματα είναι ισοδύναμα.*

Το γεωμετρικό περιεχόμενο του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Cauchy φαίνεται αν υποθέσουμε ότι $g'(\xi) \neq 0$ και $g(a) \neq g(b)$. Τότε έχουμε

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}},$$

οπότε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy λέει ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε ο λόγος των κλίσεων των εφαπτόμενων ευθειών στα γραφήματα των f και g στα σημεία $(\xi, f(\xi))$ και $(\xi, g(\xi))$ να είναι ίσος με τον λόγο των κλίσεων των ευθειών οι οποίες διέρχονται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ η πρώτη και από τα σημεία $(a, g(a))$ και $(b, g(b))$ η δεύτερη.

Άσκηση 5.3.6. *Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^n + ax + b = 0$ έχει το πολύ δυο λύσεις, αν ο n είναι άρτιος, και το πολύ τρεις λύσεις, αν ο n είναι περιττός.*

Λύση: Έστω ότι ο n είναι άρτιος και έστω ότι η εξίσωση έχει τρεις λύσεις, τις x_1, x_2, x_2 με

$$x_1 < x_2 < x_3.$$

Ορίζουμε την συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = x^n + ax + b$$

και τότε από το Θεώρημα του Rolle συνεπάγεται ότι υπάρχουν ξ, η με

$$x_1 < \xi < x_2 < \eta < x_3$$

ώστε

$$f'(\xi) = 0, \qquad f'(\eta) = 0.$$

Όμως, έχουμε ότι

$$f'(x) = nx^{n-1} + a,$$

οπότε, επειδή ο $n-1$ είναι περιττός, η f' είναι γνησίως αύξουσα και καταλήγουμε σε άτοπο.

Τώρα, έστω ότι ο n είναι περιττός και έστω ότι η εξίσωση έχει τέσσερις λύσεις, τις x_1, x_2, x_2, x_4 με

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4.$$

Για την ίδια συνάρτηση όπως πριν, από το Θεώρημα του Rolle συνεπάγεται ότι υπάρχουν ξ, η, ζ με

$$x_1 < \xi < x_2 < \eta < x_3 < \zeta < x_4$$

ώστε

$$f'(\xi) = 0, \qquad f'(\eta) = 0, \qquad f'(\zeta) = 0.$$

Πάλι από το Θεώρημα τοτ Rolle συνεπάγεται ότι υπάρχουν k, l με

$$\xi < k < \eta < l < \zeta$$

ώστε

$$f''(k) = 0, \qquad f''(l) = 0.$$

Όμως,

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2},$$

οπότε, επειδή ο $n-2$ είναι περιττός, η f'' είναι γνησίως αύξουσα και καταλήγουμε πάλι σε άτοπο.

Άσκηση 5.3.21. [α] *Έστω f συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν το γράφημα της f δεν ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$, αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ ώστε*

$$f'(\xi_1) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(\xi_2).$$

Λύση: Επειδή το γράφημα της f δεν ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$, συνεπάγεται ότι είτε υπάρχει σημείο του γραφήματος πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα είτε υπάρχει σημείο του γραφήματος κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα.

Έστω ότι έχουμε την πρώτη περίπτωση.

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ είναι η

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(\xi - a) + f(a) < f(\xi),$$

οπότε

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}.$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi_2 \in (a, \xi)$ ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$$

και, επομένως,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(\xi_2).$$

Η εξίσωση της (ίδιας) ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ είναι η

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Με το ίδιο ξ έχουμε

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(\xi - b) + f(b) < f(\xi),$$

οπότε

$$\frac{f(b) - f(\xi)}{b - \xi} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi_1 \in (\xi, b)$ ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(b) - f(\xi)}{b - \xi}$$

και, επομένως,

$$f'(\xi_1) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Η λύση είναι όμοια στην περίπτωση που υπάρχει σημείο του γραφήματος κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα.