ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΔΕΚΑΤΟ ΕΒΔΟΜΟ ΜΑΘΗΜΑ, 14-11-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Τώρα θα δούμε δυο χαρακτηριστικές ιδιότητες του lim sup και δυο αντίστοιχες ιδιότητες του lim inf μιας ακολουθίας. Είναι οι Προτάσεις 2.18 και 2.19 του βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ. [α] (i) *Αν* $\overline{\lim}\, x_n < x$, *τότε ισχύει τελικά* $x_n < x$.

(ii) *Αν* $x < \overline{\lim}\, x_n$, *τότε ισχύει* $x < x_n$ *για άπειρους* n.

[β] (i) *Αν* $x < \underline{\lim}\, x_n$, *τότε ισχύει τελικά* $x < x_n$.

(ii) *Αν* $\overline{\lim}\, x_n < x$, *τότε ισχύει* $x_n < x$ *για άπειρους* n.

Απόδειξη. [α] (i) Έστω $\overline{\lim}\, x_n < x$.
Θα υποθέσουμε (για άτοπο) ότι δεν είναι σωστό ότι ισχύει τελικά $x_n < x$.
Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) οι οποίοι είναι $\geq x$. Αυτοί οι άπειροι όροι σχηματίζουν υποακολουθία της (x_n) και αυτή η υποακολουθία έχει την ιδιότητα όλοι οι όροι της να είναι $\geq x$.
Τώρα, αυτή η υποακολουθία έχει με τη σειρά της (τουλάχιστον) μια υποακολουθία η οποία έχει όριο. (Είδαμε στο προηγούμενο μάθημα ότι κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία η οποία έχει όριο.)
Αυτή η τελευταία υποακολουθία έχει, λοιπόν, τις εξής δυο ιδιότητες: αφ' ενός έχει όριο αφ' ετέρου όλοι οι όροι της είναι $\geq x$. (Πράγματι, οι όροι της τελευταίας υποακολουθίας είναι όροι της προηγούμενης υποακολουθίας οι οποίοι είναι όλοι $\geq x$.)
Άρα το όριο της τελευταίας υποακολουθίας είναι $\geq x$.

$$\begin{array}{cccccccccccccccl}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \ldots & \\
 & x_2 & x_3 & & x_5 & & x_7 & & & x_{10} & & x_{12} & & x_{14} & \ldots & \geq x \\
 & & x_3 & & & & x_7 & & & & & x_{12} & & & \ldots & \geq x \quad \text{και με όριο}
\end{array}$$

Σκεφτόμαστε τώρα ότι όταν έχουμε μια ακολουθία και παίρνουμε μια υποακολουθία της και μετά παίρνουμε μια υποακολουθία αυτής της υποακολουθίας, τότε η τελευταία υποακολουθία είναι υποακολουθία της αρχικής ακολουθίας.
Άρα έχουμε μια υποακολουθία της (x_n) η οποία έχει όριο $\geq x$. Δηλαδή υπάρχει υποακολουθιακό όριο της (x_n) το οποίο είναι $\geq x$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, διότι $\overline{\lim}\, x_n < x$ και το $\overline{\lim}\, x_n$ είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).

(ii) Έστω $x < \overline{\lim}\, x_n$.
Επειδή το $\overline{\lim}\, x_n$ *είναι* υποακολουθιακό όριο της (x_n), υπάρχει κάποια υποακολουθία της (x_n) με όριο το $\overline{\lim}\, x_n$. Τότε οι όροι της υποακολουθίας αυτής είναι τελικά $> x$, οπότε υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) οι οποίοι είναι $> x$.

[β] Με "συμμετρικό" τρόπο. □

Γνωρίζουμε ότι δεν έχουν όλες οι ακολουθίες όριο. Πρέπει, όμως, να τονιστεί ότι, σύμφωνα με όσα έχουμε πει σ' αυτήν την ενότητα *κάθε ακολουθία έχει ανώτατο όριο και κατώτατο όριο.*

ΠΡΟΤΑΣΗ. [α] $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$.

[β] *Η* (x_n) *έχει όριο αν και μόνο αν* $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$ *και, σ' αυτήν την περίπτωση, ισχύει* $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim x_n$.

Απόδειξη. [α] Προφανές, αφού το $\underline{\lim}\, x_n$ είναι το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο και το $\overline{\lim}\, x_n$ είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).

[β] Έστω ότι η (x_n) έχει όριο.

Τότε, όπως έχουμε ήδη πει, το $\lim x_n$ είναι το μοναδικό και, επομένως, το μέγιστο και ταυτόχρονα το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n). Άρα $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim x_n$.
Αντιστρόφως, έστω $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$ και ας ορίσουμε, για συντομία,

$$x = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$x_n \to x.$$

Θα θεωρήσουμε μόνο την περίπτωση που ο x είναι αριθμός. Οι άλλες δυο περιπτώσεις είναι ανάλογες.
Έστω $\epsilon > 0$.
Επειδή

$$\overline{\lim}\, x_n = x < x + \epsilon,$$

από την προηγούμενη Πρόταση συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$x_n < x + \epsilon.$$

Και, επειδή

$$x - \epsilon < x = \underline{\lim}\, x_n,$$

πάλι από την προηγούμενη Πρόταση συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$x - \epsilon < x_n.$$

Άρα ισχύει τελικά

$$x - \epsilon < x_n < x + \epsilon.$$

Άρα $x_n \to x$. □

Άσκηση 2.7.1. *Έστω $a < b$. Βρείτε το* $\limsup$ *και το* $\liminf$ *της ακολουθίας*

$$a, a, b, a, a, b, a, a, b, a, a, b, a, a, b, \ \ldots \qquad \textit{κλπ.}$$

Λύση: Είναι σαφές ότι υπάρχει υποακολουθία με όριο a (για παράδειγμα η υποακολουθία με δείκτες που είναι πολλαπλάσια του 3 συν 1) και υποακολουθία με όριο b (για παράδειγμα η υποακολουθία με δείκτες που είναι πολλαπλάσια του 3). Άρα οι αριθμοί a και b είναι υποακολουθιακά όρια της ακολουθίας.
Ας θεωρήσουμε τώρα ένα οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποια υποακολουθία της ακολουθίας με όριο x.
Επειδή, όμως, όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι $\leq b$, και οι όροι της υποακολουθίας είναι $\leq b$. Άρα και το όριο x αυτής της υποακολουθίας είναι $\leq b$.
Ομοίως, επειδή όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι $\geq a$, και οι όροι της υποακολουθίας είναι $\geq a$, οπότε και το όριο x αυτής της υποακολουθίας είναι $\geq a$.
Άρα το τυχόν υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας είναι ανάμεσα στους a, b. Άρα το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της ακολουθίας είναι το b και το ελάχιστο είναι το a.
Δηλαδή

$$\underline{\lim}\, x_n = a \qquad \text{και} \qquad \overline{\lim}\, x_n = b.$$

Σχόλιο: Αποδείξαμε ότι το τυχόν υποακολουθιακό όριο της ακολουθίας είναι ανάμεσα στους a, b. Αφήνουμε δηλαδή ανοικτό το ενδεχόμενο να υπάρχει υποακολουθιακό όριο διαφορετικό από τους a, b. *Μπορείτε να αποδείξετε ότι οι a, b είναι τα μοναδικά υποακολουθιακά όρια της ακολουθίας;*

Άσκηση 2.7.2. *Βρείτε τα* lim sup *και* lim inf *των ακολουθιών*

$$\Big(\frac{2^n+1}{2^n}\Big), \quad \Big((-1)^{n-1}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big), \quad \Big((-1)^{n-1}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big).$$

Λύση: Η πρώτη περίπτωση είναι απλή. Επειδή

$$\frac{2^n+1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2^n} \to 1,$$

συνεπάγεται

$$\underline{\lim}\Big(\frac{2^n+1}{2^n}\Big) = \overline{\lim}\Big(\frac{2^n+1}{2^n}\Big) = 1.$$

Για την δεύτερη ακολουθία με τύπο

$$x_n = (-1)^{n-1}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)$$

έχουμε ότι

$$x_{2k} = -\Big(1-\frac{1}{2k}\Big) = -1 + \frac{1}{2k} \to -1$$

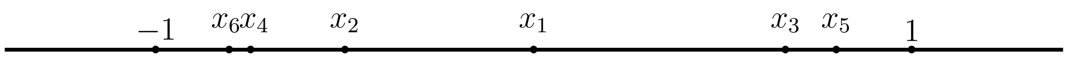
και

$$x_{2k-1} = +\Big(1-\frac{1}{2k-1}\Big) = 1 - \frac{1}{2k-1} \to 1.$$

Άρα οι αριθμοί -1 και 1 είναι υποακολουθιακά όρια της (x_n).
Τώρα έχουμε δυο τρόπους να συνεχίσουμε.
Πρώτος τρόπος:
Το συμπέρασμα της άσκησης 2.5.7 (που το ξαναχρησιμοποιήσαμε προηγουμένως ... δείτε πώς) είναι ότι οι -1 και 1 είναι τα μοναδικά υποακολουθιακά όρια της (x_n). Άρα

$$\underline{\lim}(-1)^{n-1}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) = -1 \qquad \text{και} \qquad \overline{\lim}(-1)^{n-1}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) = 1.$$

Δεύτερος τρόπος:
Παρατηρούμε πού βρίσκονται οι όροι της (x_n) σε σχέση με τους αριθμούς -1 και 1. Οι x_{2k} φθίνουν προς τον -1 και ο πρώτος από αυτούς είναι ο $x_2 = -\frac{1}{2}$. Οι x_{2k-1} αυξάνονται προς τον 1 και ο πρώτος από αυτούς είναι ο $x_1 = 0$. Άρα όλοι οι όροι της (x_n) είναι ανάμεσα στους -1 και 1.
Και τώρα συνεχίζουμε όπως στην προηγούμενη άσκηση με τους a και b.



Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει υποακολουθία της ακολουθίας με όριο x.
Επειδή όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι ≥ -1 και ≤ 1, συνεπάγεται ότι και οι όροι της υποακολουθίας είναι ≥ -1 και ≤ 1, οπότε και το όριο x αυτής της υποακολουθίας είναι ≥ -1 και ≤ 1.
Άρα το τυχόν υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας είναι ανάμεσα στους $-1, 1$. Άρα $\underline{\lim}\, x_n = -1$ και $\overline{\lim}\, x_n = 1$.

Σχόλιο: Ο πρώτος τρόπος δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην προηγούμενη άσκηση 2.7.1. Γιατί; Μπορείτε να τον προσαρμόσετε και να τον εφαρμόσετε στην άσκηση 2.7.1;

Για την τρίτη ακολουθία με τύπο

$$x_n = (-1)^{n-1}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)$$

έχουμε ότι

$$x_{2k} = -\Big(1+\frac{1}{2k}\Big) = -1-\frac{1}{2k} \to -1$$

και

$$x_{2k-1} = +\Big(1+\frac{1}{2k-1}\Big) = 1+\frac{1}{2k-1} \to 1.$$

Άρα οι αριθμοί -1 και 1 είναι υποακολουθιακά όρια της (x_n).
Και πάλι έχουμε δυο τρόπους να συνεχίσουμε.
Πρώτος τρόπος:
Πάλι το συμπέρασμα της άσκησης 2.5.7 μας λέει ότι οι -1 και 1 είναι τα μοναδικά υποακολουθιακά όρια της (x_n). Άρα

$$\underline{\lim}(-1)^{n-1}\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = -1 \qquad \text{και} \qquad \overline{\lim}(-1)^{n-1}\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = 1.$$

Δεύτερος τρόπος:
Παρατηρούμε πού βρίσκονται οι όροι της (x_n) σε σχέση με τους αριθμούς -1 και 1. Οι x_{2k} αυξάνονται προς τον -1 και οι x_{2k-1} φθίνουν προς τον 1. Άρα οι όροι της (x_n) βρίσκονται όλοι έξω από το διάστημα $[-1,1]$ και αυτό δεν επιτρέπει να προχωρήσουμε όπως με την αμέσως προηγούμενη ακολουθία. Οπότε θα σκεφτούμε κάτι διαφορετικό.

Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της ακολουθίας με όριο x.
Παίρνουμε και έναν τυχόντα αριθμό $x' > 1$.

Επειδή $x_{2k-1} \to 1$, όλοι οι όροι x_{2k-1} από κάποιον δείκτη και πέρα είναι $\le x'$. Από την άλλη μεριά, όλοι οι όροι x_{2k} είναι προφανώς $\le x'$, οπότε όλοι οι όροι x_n από κάποιον δείκτη και πέρα είναι $\le x'$. Άρα και όλοι οι όροι της υποακολουθίας (x_{n_k}) από κάποιον δείκτη και πέρα είναι $\le x'$. Άρα και το όριο x της (x_{n_k}) είναι $\le x'$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι το οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας έχει την εξής ιδιότητα: ισχύει $x \le x'$ για κάθε $x' > 1$. Γνωρίζουμε, όμως, ήδη από το πρώτο-πρώτο μάθημα, ότι αυτό συνεπάγεται $x \le 1$.
Άρα το τυχόν υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας είναι ≤ 1. Άρα ο 1 είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n), οπότε $\overline{\lim}\, x_n = 1$.
Με "συμμετρικό" τρόπο αποδεικνύεται ότι $\underline{\lim}\, x_n = -1$.