ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΤΕΤΑΡΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 15-10-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Παράδειγμα. Ως εφαρμογή της Αρχιμήδειας Ιδιότητας θα μελετήσουμε το σύνολο

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right\}.$$

Κατ' αρχάς το σύνολο A έχει προφανώς μέγιστο στοιχείο τον αριθμό 1. Οπότε, πολύ απλά,

$$\sup A = \max A = 1.$$

Τώρα, σχετικά με τα κάτω φράγματα του A παρατηρούμε ότι προφανώς ο αριθμός 0 είναι κάτω φράγμα του A και, επομένως, κάθε αριθμός ≤ 0 είναι κάτω φράγμα του A. Από την άλλη μεριά, η Αρχιμήδεια Ιδιότητα λέει ότι για κάθε $l > 0$ υπάρχει κάποιος $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < l$, δηλαδή υπάρχει στοιχείο του συνόλου A το οποίο είναι μικρότερο από τον l. Επομένως, κανένας $l > 0$ δεν είναι κάτω φράγμα του A, οπότε τα κάτω φράγματα του A είναι οι αριθμοί ≤ 0 και κανένας άλλος. Άρα το μέγιστο κάτω φράγμα του A είναι ο 0:

$$\inf A = 0.$$

Παρατηρήστε ότι το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Για κάθε στοιχείο $\frac{1}{n}$ του A υπάρχει ακόμη μικρότερο στοιχείο του A. Για παράδειγμα το $\frac{1}{n+1}$.

Τώρα πάμε σε μια Πρόταση, το αποτέλεσμα της οποίας θα μας επιτρέψει να ορίσουμε το *ακέραιο μέρος* ενός οποιουδήποτε αριθμού. Η Πρόταση αυτή είναι η Πρόταση 1.5 του βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Για κάθε x υπάρχει μοναδικός $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $k \leq x < k+1$.*

Απόδειξη. Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε x.
Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο x είναι ανάμεσα σε δυο *διαδοχικούς* ακεραίους και το πρώτο βήμα θα είναι να αποδείξουμε ότι ο x είναι ανάμεσα σε δυο ακεραίους, χωρίς να μας ενδιαφέρει αν αυτοί είναι διαδοχικοί.
Από προηγούμενο Θεώρημα έχουμε ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $x < m$. Αυτό ισχύει διότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε ο x που έχουμε δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. Από την άλλη μεριά, ούτε ο $-x$ είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, οπότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $-x < n$ που σημαίνει $-n < x$. Ονομάζουμε $l = -n$ και έτσι έχουμε βρει δυο ακεραίους, τον l και τον m ώστε

$$l < x < m.$$

(Προσέξατε το κόλπο; Για να βρούμε ακέραιο μικρότερο του x, βρήκαμε ακέραιο μεγαλύτερο του $-x$.)
Τώρα στοχεύουμε σε *διαδοχικούς* ακέραιους.
Ξεκινάμε με τον l ο οποίος είναι $\leq x$. Αν ο ισχυρισμός

“*αν ο ακέραιος τ είναι $\leq x$ τότε και ο $\tau + 1$ είναι $\leq x$*”

ήταν σωστός, τότε η Αρχή της Επαγωγής θα συνεπαγόταν ότι, ξεκινώντας με τον l, όλοι οι ακέραιοι από τον l και πέρα θα ήταν $\leq x$. (*Αφού ο l είναι $\leq x$, και ο $l+1$ είναι $\leq x$. Αφού ο $l+1$ είναι $\leq x$, και ο $l+2$ είναι $\leq x$. Κλπ.*) Αυτό, όμως, δεν είναι σωστό διότι ο ακέραιος m είναι $> x$.
Άρα ο προηγούμενος ισχυρισμός δεν είναι σωστός, οπότε υπάρχει κάποιος ακέραιος τ ο οποίος είναι $\leq x$ αλλά που ο $\tau + 1$ είναι $> x$. Αν συμβολίσουμε k αυτόν τον τ, έχουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$k \leq x < k+1.$$

Αποδείξαμε την ύπαρξη του k. Η απόδειξη της μοναδικότητας του k είναι απλή. Δείτε την στο βιβλίο. □

Έτσι, λοιπόν, σε κάθε x αντιστοιχίζεται μοναδικός $k \in \mathbb{Z}$ με την ιδιότητα $k \leq x < k+1$ και αυτόν τον μονοσήμαντα ορισμένο k τον ονομάζουμε **ακέραιο μέρος** του x και τον συμβολίζουμε

$$[x].$$

Παράδειγμα. $[3] = 3$, $[-3] = -3$, $[3.5] = 3$, $[-3.5] = -4$.

Τώρα έχουμε ένα άλλο σημαντικό αποτέλεσμα.

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ. *Για κάθε a, b με $a < b$ υπάρχει ρητός r ώστε $a < r < b$.*

Απόδειξη. Θα μελετήσουμε πρώτα μια ειδική περίπτωση για να καταλάβουμε καλύτερα την απόδειξη στην γενική περίπτωση.
Ας υποθέσουμε ότι μας δίνουν δυο αριθμούς a, b οι οποίοι απέχουν απόσταση > 1. Τότε είναι αναμενόμενο ότι ανάμεσά τους θα υπάρχει κάποιος ακέραιος, αφού κάθε δυο διαδοχικοί ακέραιοι απέχουν απόσταση ακριβώς 1. Και, επομένως, είναι αναμενόμενο ότι ο πρώτος ακέραιος που βρίσκεται δεξιά του a θα είναι ανάμεσα στον a και στον b. Ποιός είναι αυτός ο ακέραιος; Προφανώς, ο $[a] + 1$. Άρα θα αποδείξουμε (αυστηρά) ότι ισχύει $a < [a] + 1 < b$ με την υπόθεση $b - a > 1$.
Κατ' αρχάς είναι προφανές ότι

$$a < [a] + 1.$$

Κατόπιν, επειδή $b - a > 1$ και επειδή $[a] \leq a$, ισχύει

$$[a] + 1 \leq a + 1 < b.$$

Αποδείξαμε ότι, αν $b - a > 1$, τότε υπάρχει ρητός r ώστε $a < r < b$ και ότι ένας τέτοιος ρητός είναι ο ακέραιος $[a] + 1$. (Πιθανόν να υπάρχουν κι άλλοι τέτοιοι ακέραιοι αν η απόσταση $b - a$ είναι ακόμη μεγαλύτερη.)
Πάμε τώρα στην γενική περίπτωση, όταν η απόσταση $b - a$ δεν είναι αναγκαστικά > 1. Σκεφτόμαστε ότι αν πολλαπλασιάσουμε δυο αριθμούς με έναν φυσικό n τότε και η απόστασή τους πολλαπλασιάζεται με n. Πράγματι,

$$nb - na = n(b - a).$$

Αν, λοιπόν, υπάρχει ένας φυσικός n ώστε $nb - na > 1$, τότε σύμφωνα με την ειδική περίπτωση παραπάνω θα υπάρχει ακέραιος ανάμεσα στους na και nb. Υπάρχει τέτοιος φυσικός; *Ναι*: επειδή $b - a > 0$, βάσει της Αρχιμήδειας Ιδιότητας υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$0 < \frac{1}{n} < b - a$$

και, επομένως,

$$nb - na = n(b - a) > 1.$$

Κατόπιν, υπάρχει (από την ειδική περίπτωση) $k \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$na < k < nb$$

και ένας τέτοιος k είναι ο $k = [na] + 1$. Άρα

$$a < \frac{k}{n} < b,$$

οπότε υπάρχει ρητός, ο $r = \frac{k}{n}$, ώστε $a < r < b$. $\square$

Η τελευταία Πρόταση λέει με άλλα λόγια ότι μέσα σε οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα (a, b), όσο μικρό κι αν είναι αυτό και οπουδήποτε στην πραγματική ευθεία κι αν βρίσκεται, υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός. Δεν υπάρχει ανοικτό διάστημα το οποίο να μην περιέχει κανέναν ρητό. Η ιδιότητα αυτή των ρητών ονομάζεται **πυκνότητα**: *οι ρητοί είναι πυκνοί στην πραγματική ευθεία.*

Πρώτο σχόλιο: Από τη στιγμή που έχουμε εξασφαλίσει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός r ανάμεσα στους a και b, εύκολα βλέπουμε ότι υπάρχουν άπειροι ρητοί ανάμεσα στους a και b. Από $a < r < b$ προκύπτει ότι υπάρχουν ρητοί r_1, r_2 ώστε $a < r_1 < r < r_2 < b$ και ότι υπάρχουν ρητοί r_3, r_4, r_5, r_6 ώστε $a < r_3 < r_1 < r_4 < r < r_5 < r_2 < r_6 < b$ κλπ.

Δεύτερο σχόλιο: Στην ειδική περίπτωση που είναι εκ των προτέρων γνωστό ότι οι a, b είναι και οι δυο ρητοί δεν χρειάζεται καμιά απόδειξη για την ύπαρξη ρητού αριθμού ανάμεσα στους a και b. Διότι με τον απλό τύπο $r = \frac{a+b}{2}$ έχουμε αυτομάτως έναν ρητό r ώστε $a < r < b$. Όμως, στην γενική περίπτωση ο $\frac{a+b}{2}$ δεν είναι αναγκαστικά ρητός και δεν υπάρχει κανένας τύπος που να δίνει ρητό αριθμό ανάμεσα στους a και b.

Και τώρα θα μιλήσουμε για ρίζες αριθμών.

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $x^2 = 4$ έχει ως λύση τον θετικό αριθμό 2 (και τον αρνητικό -2). Επίσης, η εξίσωση $x^2 = 9$ έχει ως λύση τον θετικό αριθμό 3 (και τον αρνητικό -3). Σ' αυτά δεν υπάρχει τίποτε "μαγικό". Τους αριθμούς 2 και 3 τους ξέρουμε από τα πρώτα παιδικά μας χρόνια (κοιτώντας τα δάχτυλά μας) και ξέρουμε και τους κανόνες: $2 \cdot 2 = 4$ και $3 \cdot 3 = 9$. Τί γίνεται, όμως, με την εξίσωση

$$x^2 = 2;$$

Μαθαίνουμε στο γυμνάσιο (ούτε κουβέντα στο δημοτικό) ότι η εξίσωση έχει ως λύση κάποιον θετικό αριθμό και αυτόν τον αριθμό τον συμβολίζουμε $\sqrt{2}$. Προσέξτε: τον αριθμό που συμβολίζουμε $\sqrt{2}$ *δεν τον γνωρίζουμε από πριν* ώστε να τον πολλαπλασιάσουμε με τον εαυτό του ώστε να προκύψει αποτέλεσμα 2 και ώστε να μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η εξίσωση $x^2 = 2$ έχει *αυτόν* τον αριθμό ως λύση. Αν κάποιος πει ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ο αριθμός $1.41 \ldots$, πρέπει να αναλογιστούμε ότι ο αριθμός $1.41 \ldots$ έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία και ότι αφ' ενός δεν τα γνωρίζουμε όλα (και ούτε υπάρχει περίπτωση να τα βρούμε ποτέ όλα) αφ' ετέρου υπάρχει και το ερώτημα τί πραγματικά σημαίνει η παράσταση $1.41 \ldots$ και αν όντως παριστάνει κάποιον πραγματικό αριθμό. (Αυτό το ερώτημα θα μας απασχολήσει στα κεφάλαια των ακολουθιών και των σειρών.) Ποιός, λοιπόν, είναι ο αριθμός $\sqrt{2}$; Και ξαναλέω: τον αριθμό $\sqrt{2}$ *δεν τον γνωρίζουμε από πριν*! Ο αριθμός $\sqrt{2}$ *ορίζεται* ως ο θετικός αριθμός που ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 = 2$ και για να ορίσουμε αυτόν τον αριθμό *πρέπει να έχει εξασφαλιστεί εκ των προτέρων* ότι η εξίσωση αυτή *έχει* λύση. Πρέπει, λοιπόν, πρώτα να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^2 = 2$ έχει ως λύση *κάποιον* θετικό αριθμό και μετά να ονομάσουμε αυτόν τον αριθμό $\sqrt{2}$. Φυσικά στο γυμνάσιο (και στο λύκειο) ούτε κουβέντα για μια τέτοια απόδειξη. Ο λόγος είναι απλός: για την απόδειξη χρειάζεται η Ιδιότητα Supremum. Εδώ θα δούμε την απόδειξη ύπαρξης λύσης της λίγο γενικότερης εξίσωσης $x^2 = y$ για οποιονδήποτε δοσμένο $y \geq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Για κάθε $y \geq 0$ η εξίσωση $x^2 = y$ έχει μοναδική μη-αρνητική λύση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιονδήποτε $y \geq 0$ και ορίζουμε το σύνολο

$$X = \{x \,|\, x \geq 0, x^2 \leq y\}.$$

Μέσω αυτού του συνόλου θα προκύψει η λύση της εξίσωσης $x^2 = y$.
Κατ' αρχάς να ξεκαθαρίσουμε τί σχέση μπορεί να έχει η λύση της $x^2 = y$ με αυτό το σύνολο X και πώς θα μπορούσε να προκύψει η λύση της $x^2 = y$ από το συγκεκριμένο σύνολο ώστε να σχεδιάσουμε και την πορεία της απόδειξης.
Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε από πριν ότι ο αριθμός ξ είναι μη-αρνητική λύση της $x^2 = y$, δηλαδή ότι ισχύει $\xi \geq 0$ και $\xi^2 = y$. Τότε οι σχέσεις που καθορίζουν τα στοιχεία του X γράφονται

$$x \geq 0, \quad x^2 \leq y$$

ισοδύναμα

$$x \geq 0, \quad x^2 \leq \xi^2$$

ισοδύναμα

$$x \geq 0, \quad -\xi \leq x \leq \xi$$

ισοδύναμα

$$0 \leq x \leq \xi.$$

Άρα το σύνολο X είναι το

$$X = [0, \xi].$$

Επομένως, ο ξ που ψάχνουμε είναι το δεξιό άκρο του X ή, με άλλα λόγια, είναι το supremum του X.
Άρα η στρατηγική μας θα είναι η εξής: θα αποδείξουμε ότι το X είναι μη-κενό και άνω φραγμένο, από την Ιδιότητα Supremum θα συμπεράνουμε ότι το X έχει supremum το οποίο είναι αριθμός και τέλος θα αποδείξουμε ότι αυτός ο αριθμός, ο $\sup X$, είναι η μη-αρνητική λύση της $x^2 = y$.
Κατ' αρχάς ο αριθμός $x = 0$ ανήκει στο X διότι προφανώς ισχύει $0 \geq 0$ και $0^2 \leq y$. Άρα το X είναι μη-κενό.
Για να αποδείξουμε ότι το X είναι άνω φραγμένο θα βρούμε έναν αριθμό a τέτοιον ώστε: $a \geq 0$ και $a^2 \geq y$. Πράγματι, αν υπάρχει τέτοιος a, τότε για κάθε $x \in X$ θα ισχύει $x \geq 0$ και $x^2 \leq y \leq a^2$ και, επομένως, $x \leq a$ (αφού από την $x^2 \leq a^2$ και από τις $x \geq 0$, $a \geq 0$ συνεπάγεται $x \leq a$). Άρα ένας τέτοιος a είναι άνω φράγμα του X. Μένει να βρούμε τον a. Να δυο τέτοιοι συγκεκριμένοι a:

$$a = y + 1 \quad \text{και} \quad a = \max\{y, 1\}.$$

Για παράδειγμα, ο $a = y + 1$ είναι προφανώς ≥ 1 και, επομένως, ≥ 0 και, επειδή είναι ≥ 1, έχουμε

$$a^2 = (y + 1)^2 \geq y + 1 \geq y.$$

Αποδείξτε μόνοι σας ότι και ο $a = \max\{y, 1\}$ ικανοποιεί τις $a \geq 0$ και $a^2 \geq y$.
Άρα το X είναι άνω φραγμένο.
Άρα το X έχει supremum το οποίο είναι αριθμός. Συμβολίζουμε

$$\xi = \sup X.$$

Ισχύει

$$\xi \geq 0,$$

διότι ο 0 είναι στοιχείο του X και ο ξ είναι άνω φράγμα του X. Τώρα θα αποδείξουμε ότι

$$\xi^2 = y$$

και έτσι θα έχουμε αποδείξει την ύπαρξη μη-αρνητικής λύσης της $x^2 = y$. Αυτό θα γίνει αποκλείοντας τις σχέσεις $\xi^2 < y$ και $\xi^2 > y$. Με άτοπο!
Α. Έστω $\xi^2 < y$.
Ισχυρίζομαι ότι αν βρούμε έναν $\epsilon > 0$ τέτοιον ώστε να ισχύει $(\xi+\epsilon)^2 \leq y$ θα φτάσουμε στο άτοπο που θέλουμε. Γιατί; Διότι αν ισχύει κάτι τέτοιο, ο αριθμός $\xi + \epsilon$ ικανοποιεί τις σχέσεις $\xi + \epsilon \geq 0$ (διότι $\xi \geq 0$) και $(\xi + \epsilon)^2 \leq y$, οπότε ο $\xi + \epsilon$ είναι στοιχείο του συνόλου X και αυτό είναι άτοπο διότι ο ξ είναι άνω φράγμα του X.
Άρα αρκεί να βρούμε έναν τέτοιον ϵ. Κατ' αρχάς, γιατί είναι αναμενόμενο να υπάρχει ένας $\epsilon > 0$ ώστε $(\xi + \epsilon)^2 \leq y$; Επειδή $\xi^2 < y$, υπάρχει ένα θετικό περιθώριο από τον ξ^2 στον μεγαλύτερο y ώστε, αν αυξήσουμε τον ξ κατά μια πολύ μικρή ποσότητα ϵ, περιμένουμε ότι ο ξ^2 θα αυξηθεί μεν αλλά η αύξηση από τον ξ^2 στον $(\xi + \epsilon)^2$ θα είναι αρκετά μικρή ώστε ο $(\xi + \epsilon)^2$ να μην ξεπεράσει τον y.
Έχουμε, λοιπόν, $\xi^2 < y$ και θέλουμε να έχουμε και $(\xi + \epsilon)^2 \leq y$. Ο άγνωστος είναι ο ϵ. Τώρα, θέλουμε

$$\epsilon > 0, \quad (\xi + \epsilon)^2 \leq y$$

ισοδύναμα

$$\epsilon > 0, \quad \xi^2 + 2\xi\epsilon + \epsilon^2 \leq y.$$

Για να βρούμε έναν ϵ η τελευταία ανισότητα δεν βοηθά, διότι υπάρχει ο όρος ϵ^2, οπότε δεν θα αποφύγουμε τις τετραγωνικές ρίζες και ίσα-ίσα αυτές είναι το βασικό μας πρόβλημα (να αποδείξουμε την ύπαρξη τετραγωνικών ριζών). Θα προσπαθήσουμε να αποφύγουμε με έμμεσο τρόπο τον όρο ϵ^2. Σκεφτόμαστε ότι, αφού ψάχνουμε έτσι κι αλλιώς για *μικρό* αριθμό $\epsilon > 0$, δεν χάνουμε τίποτα να απαιτήσουμε να ισχύει $\epsilon \leq 1$ για τον ϵ που ψάχνουμε. Αυτό θα μας επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $\epsilon^2 \leq \epsilon$ και, επομένως, την $\xi^2 + 2\xi\epsilon + \epsilon^2 \leq \xi^2 + 2\xi\epsilon + \epsilon$. Αρκεί, λοιπόν, να βρούμε έναν ϵ ώστε

$$\epsilon > 0, \quad \epsilon \leq 1, \quad \xi^2 + 2\xi\epsilon + \epsilon \leq y.$$

(Πράγματι, ένας τέτοιος ϵ θα ικανοποιεί, προφανώς, και την $\xi^2 + 2\xi\epsilon + \epsilon^2 \leq y$.)
Ισοδύναμα

$$\epsilon > 0, \quad \epsilon \leq 1, \quad \epsilon \leq \frac{y - \xi^2}{2\xi + 1}.$$

Παρατηρήστε ότι, ακριβώς λόγω της υπόθεσης $\xi^2 < y$, ο τελευταίος αριθμός είναι > 0. Τώρα, ο συγκεκριμένος αριθμός

$$\epsilon = \min\left\{1, \frac{y - \xi^2}{2\xi + 1}\right\}$$

ικανοποιεί τις ανισοτικές σχέσεις που θέλουμε: είναι θετικός αφού είναι ο μικρότερος δυο θετικών αριθμών και για τον ίδιο λόγο δεν υπερβαίνει κανέναν από αυτούς τους δυο αριθμούς. Άρα βρήκαμε έναν αριθμό $\epsilon > 0$ που ικανοποιεί την $(\xi + \epsilon)^2 \leq y$ και, επομένως, έχουμε άτοπο!
Β. Έστω $\xi^2 > y$.
Τώρα ισχυρίζομαι ότι αν βρούμε έναν $\epsilon > 0$ τέτοιον ώστε να ισχύει $\epsilon \leq \xi$ και $(\xi - \epsilon)^2 \geq y$ θα φτάσουμε στο άτοπο που θέλουμε. Γιατί; Διότι αν ισχύει κάτι τέτοιο, ο αριθμός $\xi - \epsilon$ είναι ≥ 0 και για κάθε $x \in X$ θα ισχύει $x^2 \leq y \leq (\xi - \epsilon)^2$ και, επομένως, θα ισχύει $x \leq \xi - \epsilon$ (αφού από την $x^2 \leq (\xi - \epsilon)^2$ και από τις $x \geq 0, \xi - \epsilon \geq 0$ συνεπάγεται $x \leq \xi - \epsilon$). Άρα ο $\xi - \epsilon$ θα είναι άνω φράγμα του X και αυτό είναι άτοπο διότι ο ξ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του X.

Άρα αρκεί να βρούμε έναν τέτοιον ϵ. Και πάλι, γιατί είναι αναμενόμενο να υπάρχει ένας $\epsilon > 0$ ώστε $\epsilon \le \xi$ και $(\xi - \epsilon)^2 \ge y$; Επειδή $\xi^2 > y$, υπάρχει ένα θετικό περιθώριο από τον ξ^2 στον μικρότερο y ώστε, αν μειώσουμε τον ξ κατά μια πολύ μικρή ποσότητα ϵ, περιμένουμε ότι ο ξ^2 θα μειωθεί μεν αλλά η μείωση από τον ξ^2 στον $(\xi - \epsilon)^2$ θα είναι αρκετά μικρή ώστε ο $(\xi - \epsilon)^2$ να μην πέσει κάτω από τον y.
Έχουμε, λοιπόν, $\xi^2 > y$ και θέλουμε να έχουμε και $(\xi - \epsilon)^2 \ge y$. Ο άγνωστος είναι ο ϵ. Τώρα, θέλουμε

$$\epsilon > 0, \quad \epsilon \le \xi, \quad (\xi - \epsilon)^2 \ge y$$

ισοδύναμα

$$\epsilon > 0, \quad \epsilon \le \xi \quad \xi^2 - 2\xi\epsilon + \epsilon^2 \ge y.$$

Επειδή $\xi^2 - 2\xi\epsilon + \epsilon^2 \ge \xi^2 - 2\xi\epsilon$, αρκεί να βρούμε έναν ϵ ώστε

$$\epsilon > 0, \quad \epsilon \le \xi, \quad \xi^2 - 2\xi\epsilon \ge y.$$

(Ένας τέτοιος ϵ θα ικανοποιεί, προφανώς, και την $\xi^2 - 2\xi\epsilon + \epsilon^2 \ge y$.)
Ισοδύναμα

$$\epsilon > 0, \quad \epsilon \le \xi, \quad \epsilon \le \frac{\xi^2 - y}{2\xi}.$$

Παρατηρήστε ότι, λόγω της υπόθεσης $\xi^2 > y$, ο τελευταίος αριθμός είναι > 0. Τώρα, ο συγκεκριμένος αριθμός

$$\epsilon = \min\left\{\xi, \frac{\xi^2 - y}{2\xi}\right\}$$

ικανοποιεί τις ανισοτικές σχέσεις που θέλουμε: είναι θετικός αφού είναι ο μικρότερος δυο θετικών αριθμών και για τον ίδιο λόγο δεν υπερβαίνει κανέναν από αυτούς τους δυο αριθμούς. Άρα βρήκαμε έναν αριθμό $\epsilon > 0$ που ικανοποιεί τις $\epsilon \le \xi$ και $(\xi - \epsilon)^2 \ge y$ και, επομένως, έχουμε άτοπο!
Όπως είπαμε ήδη, από τα Α και Β συνεπάγεται ότι $\xi^2 = y$.
Από τη στιγμή που αποδείξαμε την ύπαρξη μη-αρνητικής λύσης της $x^2 = y$, η απόδειξη της μοναδικότητας είναι στοιχειώδης: αν $\xi_1, \xi_2 \ge 0$ και ${\xi_1}^2 = y = \xi_2^2$, συνεπάγεται αμέσως ότι $\xi_1 = \xi_2$. $\square$

Σχόλιο: Στο μάθημα παρέλειψα το μέρος Β της προηγούμενης απόδειξης επειδή δεν έφτασε ο χρόνος. Διαβάστε το!

Το Θεώρημα που αποδείξαμε είναι η ειδική περίπτωση για $n = 2$ του Θεωρήματος 1.2 του βιβλίου:

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Για κάθε $y \ge 0$ η εξίσωση $x^n = y$ έχει μοναδική μη-αρνητική λύση.*

Η απόδειξη για γενικό $n \ge 2$, η οποία υπάρχει στο βιβλίο, είναι λίγο πιο περίπλοκη τεχνικά από την απόδειξη για την ειδική περίπτωση $n = 2$, την οποία είδαμε προηγουμένως. Όποιος θέλει ας διαβάσει την γενική απόδειξη. Όμως, επειδή οι κεντρικές ιδέες αναπτύσσονται και στην παραπάνω απόδειξη στην περίπτωση $n = 2$, δεν είναι απόλυτη ανάγκη να διαβάσετε την γενική απόδειξη.