

ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΔΕΚΑΤΟ ΟΓΔΟΟ ΜΑΘΗΜΑ, 15-11-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) . Το σύμβολο

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \quad \text{ή} \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots .$$

ονομάζεται **σειρά**.

Όταν έχουμε μια σειρά ανακύπτουν συνήθως κάποια ερωτήματα: η σειρά συγκλίνει; η σειρά αποκλίνει; έχει η σειρά άθροισμα; και, αν έχει η σειρά άθροισμα, ποιά είναι η τιμή του; Και τώρα αμέσως θα δώσουμε νόημα σε αυτά τα ερωτήματα. Σχηματίζουμε τα διαδοχικά αθροίσματα

$$s_1 = x_1$$

$$s_2 = x_1 + x_2$$

$$s_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

και, γενικότερα,

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \quad \text{για κάθε } n.$$

Το άθροισμα s_n ονομάζεται **n -οστό μερικό άθροισμα** της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και η ακολουθία (s_n) ονομάζεται **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων** της σειράς.

Αν η ακολουθία (s_n) συγκλίνει, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **συγκλίνει** και το όριο s της (s_n) , το οποίο είναι αριθμός, λέμε ότι είναι το **άθροισμα** της σειράς και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s.$$

Αν η ακολουθία (s_n) αποκλίνει στο $+\infty$, τότε λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει στο $+\infty$** και το όριο $+\infty$ της (s_n) λέμε ότι είναι το **άθροισμα** της σειράς και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty.$$

Ομοίως, αν η ακολουθία (s_n) αποκλίνει στο $-\infty$, τότε λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει στο $-\infty$** και το όριο $-\infty$ της (s_n) λέμε ότι είναι το **άθροισμα** της σειράς και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = -\infty.$$

Αν η ακολουθία (s_n) δεν έχει όριο, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **αποκλίνει** και ότι **δεν έχει άθροισμα**.

Ο x_n ονομάζεται **n -οστός όρος ή προσθετέος** της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Επισημαίνουμε ότι το σύμβολο $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ της σειράς των x_n έχει διπλό περιεχόμενο. Αφ' ενός, είναι ένα σκέτο σύμβολο, ανεξάρτητα από το αν η σειρά έχει άθροισμα ή όχι. Αφ' ετέρου, στην περίπτωση που η σειρά έχει άθροισμα, συμβολίζει και το άθροισμα της σειράς.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 \quad \text{ή} \quad 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots .$$

Τα μερικά αθροίσματά της είναι διαδοχικά $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + 1 = 2$, $s_3 = 1 + 1 + 1 = 3$ και, γενικότερα,

$$s_n = 1 + \cdots + 1 = n$$

για κάθε n . Επειδή $s_n = n \rightarrow +\infty$, η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$ και το άθροισμά της είναι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Παράδειγμα. Η λεγόμενη *μηδενική σειρά* είναι η

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 0 \quad \text{ή} \quad 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots.$$

Τα μερικά αθροίσματα είναι $s_1 = 0$, $s_2 = 0 + 0 = 0$, $s_3 = 0 + 0 + 0 = 0$ και, γενικότερα,

$$s_n = 0 + \cdots + 0 = 0$$

για κάθε n . Επειδή $s_n = 0 \rightarrow 0$, η μηδενική σειρά συγκλίνει στον 0 και το άθροισμά της είναι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Παράδειγμα. Η γεωμετρική σειρά με λόγο a είναι η

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1} \quad \text{ή} \quad 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + \cdots.$$

Η σειρά αυτή έχει μερικά αθροίσματα $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + a$, $s_3 = 1 + a + a^2$ και, γενικότερα,

$$s_n = 1 + a + \cdots + a^{n-1}$$

για κάθε n . Έχουμε ξαναδεί την ακολουθία (s_n) . Το ευτύχημα με αυτήν την ακολουθία (πράγμα που δεν συμβαίνει συνήθως με την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων μιας οποιασδήποτε σειράς) είναι ότι υπάρχει απλός συνοπτικός τύπος του n -οστού όρου s_n . Πράγματι:

$$s_n = 1 + a + \cdots + a^{n-1} = \begin{cases} \frac{a^n - 1}{a - 1}, & \text{αν } a \neq 1 \\ n, & \text{αν } a = 1 \end{cases}$$

Βάσει των διαφόρων περιπτώσεων για το όριο της γεωμετρικής προόδου (a^n) , έχουμε ότι

$$\lim s_n \begin{cases} = +\infty, & \text{αν } a \geq 1 \\ = \frac{1}{1-a}, & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν υπάρχει,} & \text{αν } a \leq -1 \end{cases}$$

Επομένως, για το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς έχουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1} \begin{cases} = +\infty, & \text{αν } a \geq 1 \\ = \frac{1}{1-a}, & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν υπάρχει,} & \text{αν } a \leq -1 \end{cases}$$

Ειδική περίπτωση είναι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}$ ή $1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$. Η σειρά αυτή δεν έχει άθροισμα και είναι ένα απλό χαρακτηριστικό παράδειγμα που

δείχνει ότι χρειάζεται κάποια λεπτότητα και περίσκεψη στον χειρισμό των σειρών. Για παράδειγμα, έχω ακούσει πολλές φορές το βιαστικό συμπέρασμα ότι η σειρά αυτή έχει άθροισμα 0. Η αιτιολόγηση είναι “λογική” και βασίζεται στις διαγραφές των διαδοχικών προσθετέων:

$$\underbrace{1 + (-1)} + \underbrace{1 + (-1)} + \underbrace{1 + (-1)} + \underbrace{1 + (-1)} + \cdots = 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 0.$$

Όμως, κάποιος μπορεί να ισχυριστεί, εξίσου βιαστικά, ότι η σειρά έχει άθροισμα 1 με την εξίσου “λογική” αιτιολόγηση:

$$1 + \underbrace{(-1) + 1} + \underbrace{(-1) + 1} + \underbrace{(-1) + 1} + \underbrace{(-1) + 1} + \cdots = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

Ένας προσεκτικός μελετητής θα κάνει τις διαδοχικές αθροίσεις (δηλαδή την διαδικασία που ακολουθούμε στην καθημερινή ζωή όταν έχουμε να προσθέσουμε πολλούς αριθμούς) ως εξής:

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + (-1) = 0$$

$$s_3 = (1 + (-1)) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$s_4 = (1 + (-1) + 1) + (-1) = 1 + (-1) = 0$$

κλπ. Έτσι θα δει ότι η ακολουθία των διαδοχικών αθροισμάτων είναι η

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots \quad \text{κλπ}$$

και θα αποφασίσει ότι η σειρά δεν έχει άθροισμα.

Ακολουθούν μερικά μη-τετριμμένα παραδείγματα που τα έχουμε μελετήσει στο πλαίσιο των ακολουθιών.

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ έχει μερικά αθροίσματα

$$s_n = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

για κάθε n . Γνωρίζουμε ότι $s_n \rightarrow e - 1$, οπότε η σειρά συγκλίνει στον αριθμό $e - 1$ και, επομένως,

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ έχει μερικά αθροίσματα

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

για κάθε n . Έχουμε αποδείξει ότι η ακολουθία (s_n) συγκλίνει. Άρα η σειρά συγκλίνει και έχει άθροισμα το οποίο είναι αριθμός. Δηλαδή,

$$\text{Η σειρά } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ συγκλίνει.}$$

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ ονομάζεται **αρμονική σειρά** και έχει μερικά αθροίσματα

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

για κάθε n . Έχουμε αποδείξει ότι η ακολουθία (s_n) αποκλίνει στο $+\infty$, οπότε η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$ και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε $x_n \rightarrow 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και έστω s το άθροισμά της. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ για τα οποία ισχύει

$$s_n \rightarrow s.$$

Τότε, όμως,

$$x_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0.$$

□

Η Πρόταση αυτή, δηλαδή η Πρόταση 8.1 του βιβλίου, χρησιμοποιείται πολύ συχνά με “αρνητικό τρόπο”.

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ αποκλίνει διότι $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \neq 0$.

Το πρώτο πράγμα που κοιτάμε σε μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ είναι αν ισχύει $x_n \rightarrow 0$ ή όχι. Αν δεν ισχύει $x_n \rightarrow 0$, τότε αμέσως συμπεραίνουμε ότι η σειρά δεν συγκλίνει. Αν ισχύει $x_n \rightarrow 0$, τότε αυτό είναι ένδειξη ότι η σειρά *μπορεί* να συγκλίνει.

Παράδειγμα. Η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει. Όμως, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι *δεν ισχύει το αντίστροφο της τελευταίας Πρότασης*. Και μας λέει ότι αν $x_n \rightarrow 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ μπορεί να συγκλίνει αλλά μπορεί και να μην συγκλίνει και ότι χρειάζεται περαιτέρω μελέτη για να καταλήξουμε στο αν συγκλίνει η σειρά ή όχι.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω ότι οι ακολουθίες (x_n) και (y_n) ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$ αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$, αντιστοίχως, συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$.

Διαβάστε την απόδειξη μόνοι σας. Διαβάστε επίσης και κάποια απλά πράγματα για την λεγόμενη *αλλαγή δείκτη* όπως και για τα σύμβολα $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n$.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. Σχηματίζουμε τα αθροίσματα $r_n = \sum_{m=n}^{+\infty} x_m$ για κάθε n . Τότε $r_n \rightarrow 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ είναι ο αριθμός s . Τότε

$$\begin{aligned} r_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots = s \\ r_2 &= x_2 + x_3 + x_4 + \cdots = s - x_1 = s - s_1 \\ r_3 &= x_3 + x_4 + \cdots = s - x_1 - x_2 = s - s_2 \\ r_4 &= x_4 + \cdots = s - x_1 - x_2 - x_3 = s - s_3 \end{aligned}$$

και, γενικότερα,

$$r_n = s - s_{n-1}$$

για κάθε n . Επειδή $s_n \rightarrow s$, συνεπάγεται

$$r_n = s - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0.$$

□

Διαβάστε τις αποδείξεις των επόμενων δυο Προτάσεων από το βιβλίο. Είναι οι Προτάσεις 8.4 και 8.5.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα και το $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n + y_n)$ έχει άθροισμα και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Αυτό το αποτέλεσμα γράφεται και

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + \cdots = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots) + (y_1 + y_2 + y_3 + \cdots).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα και το $\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n$ έχει άθροισμα και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

Και αυτό το αποτέλεσμα γράφεται και

$$\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + \cdots = \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots).$$

Να πούμε μόνο ότι η μόνη περίπτωση να είναι η παράσταση $\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ απροσδιόριστη μορφή είναι όταν $\lambda = 0$ και, συγχρόνως, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \pm\infty$. Τότε, όμως, η κατάσταση είναι εξ αρχής απροσδόκητα απλή: επειδή $\lambda = 0$, κάθε όρος λx_n είναι $= 0$, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 0x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Η επόμενη Πρόταση, η 8.6 του βιβλίου, είναι αρκετά σημαντική.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω ότι ισχύει $x_n \leq y_n$ για κάθε n .

[α] Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.

Αν, επιπλέον, υπάρχει n_0 ώστε $x_{n_0} < y_{n_0}$ και αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνουν, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.

Ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ και το κοινό άθροισμα είναι αριθμός, τότε $x_n = y_n$ για κάθε n .

[β] Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty$.

[γ] Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = -\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = -\infty$.

Απόδειξη. [α] Έστω

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} y_n = t,$$

όπου $s, t \in \overline{\mathbb{R}}$.

Θεωρούμε και τα μερικά αθροίσματα των δυο σειρών:

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \quad \text{και} \quad t_n = y_1 + \cdots + y_n.$$

Επειδή

$$s_n \rightarrow s \quad \text{και} \quad t_n \rightarrow t$$

και επειδή ισχύει

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \leq y_1 + \cdots + y_n = t_n$$

για κάθε n , συνεπάγεται $s \leq t$.

Έστω, επιπλέον, ότι $x_{n_0} < y_{n_0}$ και $s, t \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$t_n - s_n = (y_1 - x_1) + \cdots + (y_{n_0} - x_{n_0}) + \cdots + (y_n - x_n) \geq y_{n_0} - x_{n_0},$$

επειδή όλες οι παρενθέσεις είναι μη-αρνητικές και ο $y_{n_0} - x_{n_0}$ είναι ένας από τους όρους του αθροίσματος.

Τώρα, έχουμε ότι

$$t_n - s_n \rightarrow t - s$$

και άρα

$$t - s \geq y_{n_0} - x_{n_0} > 0.$$

[β] Όπως πριν, ισχύει $s_n \leq t_n$ για κάθε n . Άρα, αν $s_n \rightarrow +\infty$, τότε $t_n \rightarrow +\infty$.

[γ] Όπως στο [β].

□