ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΕΒΔΟΜΟ ΜΑΘΗΜΑ, 16-1-14

Μ. Παπαδημητράκης.

Άσκηση 5.3.15. *Έστω f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Αποδείξτε ότι*

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big) = 0.$$

Λύση: Θα εκμεταλλευτούμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής, γράφοντας

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi)(x+1-x) = f'(\xi) \tag{1}$$

για κάποιο ξ στο διάστημα $(x, x+1)$.

Μια "απλοϊκή" λύση είναι η εξής: όταν $x \to +\infty$, τότε $\xi \to +\infty$ (επειδή $x < \xi < x+1$), οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση, $f'(\xi) \to 0$, οπότε $f(x+1) - f(x) \to 0$.

Αυτή η απόδειξη δεν είναι εντελώς αυστηρή διότι το ξ δεν είναι συνάρτηση του x με την αυστηρή έννοια (μπορεί στο ίδιο x να αντιστοιχούν παραπάνω από ένα ξ). Όμως, η ουσία της απόδειξης είναι σωστή και πολλές φορές αυτού του τύπου η απόδειξη είναι αποδεκτή.

Μια πιο "τυπική" απόδειξη είναι η εξής.

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, υπάρχει $N > 0$ ώστε

$$x > N \quad \Rightarrow \quad |f'(x)| < \epsilon.$$

Τώρα έστω $x > N$. Θεωρούμε το αντίστοιχο $\xi \in (x, x+1)$ για το οποίο ισχύει η (1). Τότε $\xi > N$ και, επομένως,

$$|f'(\xi)| < \epsilon.$$

Άρα

$$|f(x+1) - f(x)| = |f'(\xi)| < \epsilon.$$

Άρα

$$x > N \quad \Rightarrow \quad |f(x+1) - f(x)| < \epsilon$$

οπότε $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big) = 0$.

Άσκηση 5.3.16. *Έστω f συνεχής στο $[a,b)$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν υπάρχει το $\lim_{x\to a+} f'(x)$, αποδείξτε ότι η υπάρχει η $f'(a)$ και*

$$f'(a) = \lim_{x\to a+} f'(x).$$

Λύση: Έστω

$$\lim_{x\to a+} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Θεωρούμε την περίπτωση $l \in \mathbb{R}$. Οι περιπτώσεις $l = \pm\infty$ έχουν παρόμοια αντιμετώπιση.

Αν $x \in (a,b)$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(\xi) \tag{2}$$

για κάποιο ξ στο διάστημα (a,x).

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x\to a+} f'(x) = l$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$a < x < a + \delta \quad \Rightarrow \quad |f'(x) - l| < \epsilon.$$

Τώρα έστω $a < x < a + \delta$. Θεωρούμε το αντίστοιχο $\xi \in (a, x)$ για το οποίο ισχύει η (2). Τότε $a < \xi < a + \delta$, οπότε

$$|f'(\xi) - l| < \epsilon.$$

Άρα

$$\Big|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - l\Big| = |f'(\xi) - l| < \epsilon.$$

Άρα

$$a < x < a + \delta \quad \Rightarrow \quad \Big|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - l\Big| < \epsilon,$$

οπότε

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

και, επομένως, $f'(a) = l$.

Άσκηση 5.3.20. [α] *Έστω f συνεχής στο διάστημα I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I. Αποδείξτε ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε x στο εσωτερικό του I αν και μόνο αν ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$ για κάθε x', x'' στο I.*

Λύση: Έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.
Παίρνουμε τυχαία x', x'' στο I.
Αν $x' = x''$, τότε η $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$ είναι προφανώς σωστή ($0 \leq 0$).
Αν $x' \neq x''$, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x', x'']$ ή $[x'', x']$ και έχουμε ότι υπάρχει ξ στο εσωτερικό αυτού του διαστήματος και, επομένως, στο εσωτερικό του διαστήματος I ώστε

$$\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} = f'(\xi).$$

Άρα

$$\Big|\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''}\Big| = |f'(\xi)| \leq M$$

και, επομένως, ισχύει η $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$ για κάθε x', x'' στο I.
Έστω x στο εσωτερικό του I και οποιοδήποτε $t \in I$, $t \neq x$, οπότε

$$\Big|\frac{f(t) - f(x)}{t - x}\Big| \leq M.$$

Επειδή

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x),$$

συνεπάγεται

$$\lim_{t \to x} \Big|\frac{f(t) - f(x)}{t - x}\Big| = |f'(x)|,$$

και επομένως

$$|f'(x)| \leq M.$$

Τώρα έχουμε την Πρόταση 5.6 του βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω f συνεχής στο διάστημα I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I.*
[α] *Η f είναι σταθερή στο I αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.*
[β] *Η f είναι αύξουσα στο I αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.*
[γ] *Η f είναι φθίνουσα στο I αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) \leq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.*

Απόδειξη. [α] Αν η f είναι σταθερή στο I, τότε ισχύει

$$f(x) = c$$

για κάθε x στο I, όπου c είναι μια σταθερά ανεξάρτητη του x. Τότε

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{c - c}{t - x} = \lim_{t \to x} 0 = 0$$

για κάθε x στο I.
Η απόδειξη είναι υπερβολικά απλή και την έκανα για να την αντιδιαστείλω με την απόδειξη του αντιστρόφου, η οποία είναι εξαιρετικά δύσκολη! Η απόδειξη του αντίστροφου χρησιμοποιεί το Θέωρημα Μέσης Τιμής, το οποίο για να αποδειχθεί χρησιμοποιεί το Θεώρημα του Fermat αλλά και το Θεώρημα του Rolle, το οποίο χρησιμοποιεί το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής, το οποίο χρησιμοποιεί το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass, το οποίο χρησιμοποιεί το Θέωρημα για όρια Μονότονων Ακολουθιών, το οποίο χρησιμοποιεί την Ιδιότητα Supremum!
Έστω, λοιπόν, ότι ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.
Έστω a, b στο I με $a < b$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[a, b]$ συνεπάγεται ότι υπάρχει ξ στο (a, b) και επομένως στο εσωτερικό του I ώστε

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Όμως, $f'(\xi) = 0$ και άρα

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Άρα ισχύει $f(a) = f(b)$ για κάθε $a, b \in I$ και έτσι η f είναι σταθερή στο I.
Οι αποδείξεις των [β] και [γ] είναι παρόμοιες. Δείτε τις στο βιβλίο. □

Δείτε και την Πρόταση 5.7 στο βιβλίο για γνήσια μονοτονία συναρτήσεων σε διαστήματα.

Πέρα από την χρηση της παραγώγου για μελέτη της μονοτονίας μιας συνάρτησης (κάτι που έχετε δει κατά κόρον στο Λύκειο), υπάρχει και η χρήση της παραγώγου για την απόδειξη ανισοτήτων.

Άσκηση 5.4.14. *Αποδείξτε ότι ισχύει*

$$x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x \qquad \text{για } x > 0.$$

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \arctan x - x.$$

Τότε

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0 \qquad \text{για } x \neq 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$ και, επομένως, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Άρα ισχύει

$$\arctan x - x = f(x) < f(0) = 0 \qquad \text{για } x > 0$$

και επομένως

$$\arctan x < x \qquad \text{για } x > 0.$$

(Χρησιμοποιήσαμε μόνο ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Το ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και στο $(-\infty, 0]$ χρησιμοποιείται για να δούμε ποιά ανισότητα ισχύει για $x < 0$.)

Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3}.$$

Τότε

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{1+x^2} > 0 \qquad \text{για } x \neq 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$ και, επομένως, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Άρα ισχύει

$$\arctan x - x + \frac{x^3}{3} = f(x) > f(0) = 0 \qquad \text{για } x > 0$$

και επομένως

$$\arctan x > x - \frac{x^3}{3} \qquad \text{για } x > 0.$$

Άσκηση 5.4.19. *Έστω $0 < a < b$ και $x \geq -a$, $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι*

$$\left(1 + \frac{x}{a}\right)^a < \left(1 + \frac{x}{b}\right)^b. \tag{3}$$

Λύση: Η (3) μπορεί να αποδειχθεί με διάφορους τρόπους. Εδώ θα προσπαθήσω να σας δείξω πώς μπορούμε να απλοποιήσουμε πρώτα την ανισότητα και, αφού την γράψουμε σε μια απλούστερη (αλλά ισοδύναμη) μορφή, μετά να εφαρμόσουμε τεχνικές με παραγώγους για να αποδείξουμε την απλοποιημένη ανισότητα.

Γράφουμε την (3) ισοδύναμα

$$\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{b}} < 1 + \frac{x}{b}$$

και, αφού κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$t = \frac{x}{a},$$

η νέα ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$(1+t)^{\frac{a}{b}} < 1 + \frac{a}{b}\, t.$$

Τέλος, αν θέσουμε
$$k = \frac{a}{b},$$
η ανισότητα παίρνει την τελική ισοδύναμη μορφή
$$(1+t)^k < 1 + kt. \tag{4}$$
Πρέπει να γράψουμε και τις συνθήκες $0 < a < b$ και $x \geq -a$, $x \neq 0$ σε ισοδύναμη μορφή με τις νέες παραμέτρους k και t. Αυτό είναι εύκολο:
$$0 < k < 1,\ t \geq -1,\ t \neq 0.$$
Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο
$$f(t) = (1+t)^k - 1 - kt.$$
Είναι
$$f'(t) = k(1+t)^{k-1} - k = k\big((1+t)^{k-1} - 1\big).$$
Εύκολα βλέπουμε ότι
$$f'(t) \begin{cases} > 0, & \text{αν } -1 < t < 0 \\ = 0, & \text{αν } t = 0 \\ < 0, & \text{αν } 0 < t \end{cases}$$
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. Άρα ισχύει
$$f(t) < f(0) = 0 \qquad \text{για } t \geq -1, t \neq 0.$$
Αυτό σημαίνει ότι ισχύει η (4) και επομένως η ισοδύναμη (3).