# ΑΝΑΛΥΣΗ 1

## ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΟΓΔΟΟ ΜΑΘΗΜΑ, 17-1-14

Μ. Παπαδημητράκης.

Μια συνάρτηση $f$ λέμε ότι είναι **κυρτή** στο διάστημα $I$ αν ισχύει

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \tag{1}$$

για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε $t$ με $0 < t < 1$.
Αν ισχύει η αντίθετη ανισότητα (1), τότε λέμε ότι η $f$ είναι **κοίλη** στο διάστημα $I$. Επίσης, αν η ανισότητα (1) είναι γνήσια, τότε λέμε ότι η $f$ είναι **γνησίως κυρτή** στο $I$ και, αν ισχύει η γνήσια αντίθετη ανισότητα (1), τότε λέμε ότι η $f$ είναι **γνησίως κοίλη** στο $I$.

**Παράδειγμα.** Κάθε συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \mu x + \nu$$

είναι κυρτή και κοίλη στο $\mathbb{R}$.
Πράγματι, έχουμε

$$f((1-t)x_1 + tx_2) = \mu((1-t)x_1 + tx_2) + \nu = (1-t)\mu x_1 + t\mu x_2 + \nu$$

και

$$\begin{aligned}(1-t)f(x_1) + tf(x_2) &= (1-t)(\mu x_1 + \nu) + t(\mu x_2 + \nu) \\ &= (1-t)\mu x_1 + (1-t)\nu + t\mu x_2 + t\nu = (1-t)\mu x_1 + t\mu x_2 + \nu.\end{aligned}$$

Άρα

$$f((1-t)x_1 + tx_2) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2),$$

οπότε ισχύει και η (1) και η αντίθετη (1) και άρα η $f$ είναι κυρτή και κοίλη στο $\mathbb{R}$.

**Παράδειγμα.** Η συνάρτηση

$$f(x) = |x|$$

είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
Τώρα, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα για την απόλυτη τιμή και το ότι $0 < t < 1$, έχουμε

$$\begin{aligned}f((1-t)x_1 + tx_2) &= |(1-t)x_1 + tx_2| \leq |(1-t)x_1| + |tx_2| = (1-t)|x_1| + t|x_2| \\ &= (1-t)f(x_1) + tf(x_2).\end{aligned}$$

**Παράδειγμα.** Η συνάρτηση

$$f(x) = x^2$$

είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$.
Η ανισότητα που έχουμε να αποδείξουμε είναι η

$$f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

ή, ισοδύναμα,

$$((1-t)x_1 + tx_2)^2 < (1-t){x_1}^2 + t{x_2}^2$$

ή, ισοδύναμα,

$$(1-t)^2{x_1}^2 + 2(1-t)tx_1x_2 + t^2{x_2}^2 < (1-t){x_1}^2 + t{x_2}^2$$

ή, ισοδύναμα,

$$2(1-t)tx_1x_2 < (1-t)t{x_1}^2 + (1-t)t{x_2}^2$$

ή, ισοδύναμα, (επειδή $0 < t < 1$)

$$2x_1x_2 < {x_1}^2 + {x_2}^2$$

ή, ισοδύναμα,

$$0 < (x_1 - x_2)^2$$

το οποίο ισχύει, διότι $x_1 < x_2$.

Τώρα θα μετασχηματίσουμε την ανισότητα (1) σε μια λίγο διαφορετική αλλά ισοδύναμη μορφή και με βάση αυτήν την νέα μορφή θα δούμε το γεωμετρικό περιεχόμενο της έννοιας της κυρτότητας και θα αναπτύξουμε κριτήρια για να αποδεικνύουμε ότι μια συνάρτηση είναι κυρτή.

Κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητής από $t$ σε $x$, θέτοντας

$$x = (1-t)x_1 + tx_2.$$

Αν λύσουμε ως προς $t$, βρίσκουμε τον τύπο της αντίστροφης αλλαγής μεταβλητής:

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Και τώρα είναι φανερή η ισοδυναμία

$$0 < t < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x < x_2.$$

Παρατηρούμε ότι το $t = 0$ είναι ισοδύναμο με το $x = x_1$ και το $t = 1$ είναι ισοδύναμο με το $x = x_2$. Επίσης, αν το $t$ αυξάνεται από το $0$ στο $1$, τότε το $x$ αυξάνεται από το $x_1$ στο $x_2$ και, αντιστρόφως, αν το $x$ αυξάνεται από το $x_1$ στο $x_2$, τότε το $t$ αυξάνεται από το $0$ στο $1$.

Τώρα θα ξαναγράψουμε την ανισότητα (1) αντικαθιστώντας την μεταβλητή $t$ με την μεταβλητή $x$. Βοηθητικά, παρατηρήστε ότι

$$1 - t = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}.$$

Και τώρα η (1) γράφεται ισοδύναμα

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\, f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\, f(x_2) \tag{2}$$

για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε $x$ με $x_1 < x < x_2$.
Άρα, αν ισχύει η (2), τότε η $f$ είναι κυρτή στο διάστημα $I$. Αν ισχύει η γνήσια ανισότητα (2), η $f$ είναι γνησίως κυρτή και, αν ισχύει η αντίθετη (2) ή η γνήσια αντίθετη (2), τότε η $f$ είναι κοίλη ή γνησίως κοίλη στο $I$.

Από την ανισότητα (2) προκύπτει το γεωμετρικό περιεχόμενο της ένοιας της κυρτότητας.

Για να το δούμε θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$g(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\, f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\, f(x_2).$$

Μετά από λίγες πράξεις ο τύπος γράφεται και

$$g(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\, x + \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1}$$

και βλέπουμε ότι το γράφημα της $g$ είναι ευθεία με κλίση $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Από τον αρχικό τύπο της $g$ βλέπουμε αμέσως ότι $g(x_1) = f(x_1)$ και $g(x_2) = f(x_2)$. Άρα το γράφημα της $g$ είναι η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$. Τώρα, η ανισότητα (2) γράφεται

$$f(x) \leq g(x)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε $x$ με $x_1 < x < x_2$. Και αυτό μεταφράζεται σε γεωμετρική γλώσσα στο εξής: "για κάθε $x$ στο διάστημα $(x_1, x_2)$ το σημείο $(x, f(x))$ βρίσκεται κάτω (με την ευρεία έννοια) από το σημείο $(x, g(x))$" ή, με άλλα λόγια, "το μέρος του γραφήματος της $f$ που αντιστοιχεί στο διάστημα $(x_1, x_2)$ βρίσκεται κάτω (με την ευρεία έννοια) από το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$". Αυτό πρέπει να ισχύει για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$.

Στη συνέχεια θα δούμε δυο βασικά κριτήρια με τα οποία μπορούμε να αποφασίσουμε αν μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε κάποιο διάστημα. Είναι οι Προτάσεις 5.12 και 5.13 του βιβλίου.

**ΠΡΟΤΑΣΗ.** *Έστω ότι η $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $I$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του $I$.*
[α] *Η $f$ είναι (γνησίως) κυρτή στο διάστημα $I$ αν και μόνο αν η $f'$ είναι (γνησίως) αύξουσα στο εσωτερικό του $I$.*
[β] *Η $f$ είναι (γνησίως) κοίλη στο διάστημα $I$ αν και μόνο αν η $f'$ είναι (γνησίως) φθίνουσα στο εσωτερικό του $I$.*

*Απόδειξη.* Θα δούμε μόνο την απόδειξη για την κυρτότητα. Όλα τα άλλα αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο.
Έστω ότι η $f'$ είναι αύξουσα στο εσωτερικό του $I$.
Θεωρούμε τυχαία $x, x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x < x_2$.
Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής στα διαστήματα $[x_1, x]$ και $[x, x_2]$ έχουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x)$ και $\xi_2 \in (x, x_2)$ ώστε

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2).$$

Επειδή η $f'$ είναι αύξουσα στο εσωτερικό του $I$ και επειδή τα $\xi_1, \xi_2$ ανήκουν στο εσωτερικό του $I$ και $\xi_1 < \xi_2$, συνεπάγεται

$$f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2),$$

οπότε

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Με λίγες πράξεις, συνεπάγεται

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),$$

οπότε η $f$ είναι κυρτή στο $I$.

Αντιστρόφως, έστω ότι η $f$ είναι κυρτή στο $I$. Έστω τυχαία $x_1, x_2$ στο εσωτερικό του $I$ με $x_1 < x_2$. (Θα δείξουμε ότι $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.)
Από την βασική ανισότητα (2), αφαιρώντας $f(x_1)$ από τα δύο μέλη της, βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Τώρα, αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε $x$ στο διάστημα $(x_1, x_2)$ και, παίρνοντας όριο όταν $x \to x_1+$, βρίσκουμε ότι

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Με τον ίδιο τρόπο (αφαιρώντας από την (2) το $f(x_2)$ κλπ), βρίσκουμε

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2).$$

Από τις δυο τελευταίες ανισότητες έχουμε

$$f'(x_1 \leq f'(x_2)$$

και τελειώσαμε. □

Από την Πρόταση αυτή προκύπτει ένας ακόμη γεωμετρικός χαρακτηρισμός της έννοιας της κυρτότητας για συναρτήσεις $f$ οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $I$ και παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του $I$. Το ότι η $f$ είναι κυρτή στο $I$ σημαίνει ότι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της $f$ σε ένα εσωτερικό του σημείο αυξάνεται όταν το σημείο επαφής κινείται προς τα δεξιά.

Βάσει της σχέσης ανάμεσα στη μονοτονία συνάρτησης και στο πρόσημο της παραγώγου της, έχουμε την εξής παραλλαγή της τελευταίας Πρότασης.

**ΠΡΟΤΑΣΗ.** *Έστω ότι η $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $I$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του $I$.*
[α] *Η $f$ είναι κυρτή στο $I$ αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x$ στο εσωτερικό του $I$. Αν ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x$ στο εσωτερικό του $I$, τότε η $f$ είναι γνησίως κυρτή στο $I$.*
[β] *Η $f$ είναι κοίλη στο $I$ αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \leq 0$ για κάθε $x$ στο εσωτερικό του $I$. Αν ισχύει $f''(x) < 0$ για κάθε $x$ στο εσωτερικό του $I$, τότε η $f$ είναι γνησίως κοίλη στο $I$.*

*Απόδειξη.* Προφανής. □