ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΠΕΜΠΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 17-10-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Την προηγούμενη φορά αναφέραμε (και αποδείξαμε στην περίπτωση $n = 2$) το θεώρημα που λέει ότι, αν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, τότε για κάθε $y \geq 0$ υπάρχει μοναδική μη-αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = y$. Ο μη-αρνητικός αριθμός που ικανοποιεί την εξίσωση αυτή ονομάζεται n-**οστή ρίζα** του y και συμβολίζεται

$$\sqrt[n]{y}.$$

Όταν $n = 2$ γράφουμε $\sqrt{y}$ αντί $\sqrt[2]{y}$.
Με άλλα λόγια έχουμε την ισοδυναμία

$$x = \sqrt[n]{y} \iff x \geq 0, x^n = y.$$

Σχόλιο: Πρέπει να τονιστεί ότι η n-οστή ρίζα $\sqrt[n]{y}$ ορίζεται μόνο για $y \geq 0$.

Στο λύκειο έχει αποδειχθεί ότι κανένας ρητός αριθμός δεν ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 = 2$. Ένα λίγο γενικότερο αποτέλεσμα αποδεικνύεται στην Πρόταση 1.6 του βιβλίου (δεν το αποδεικνύω στο μάθημα διότι είναι καθαρά αλγεβρικής φύσης). Εμείς μόλις πριν λίγο αποδείξαμε ότι *υπάρχει* μη-αρνητικός αριθμός που ικανοποιεί την $x^2 = 2$ και μάλιστα τον συμβολίσαμε $\sqrt{2}$. Άρα ο αριθμός $\sqrt{2}$ (που υπάρχει) είναι άρρητος. Άρρητοι ονομάζονται οι πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι ρητοί και μόλις τώρα αποδείξαμε την ύπαρξη τουλάχιστον ενός τέτοιου άρρητου αριθμού! Με άλλα λόγια, τώρα γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι κενό (Πρόταση 1.7 στο βιβλίο). Μπορούμε, όμως, να πούμε και περισσότερα: οι άρρητοι αριθμοί όχι μόνο υπάρχουν αλλά είναι και πολλοί. Οι άρρητοι, όπως και οι ρητοί, είναι πυκνοί.

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ. *Για κάθε a, b με $a < b$ υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος x ώστε $a < x < b$.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε με έναν έξυπνο τρόπο την πυκνότητα των ρητών. Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε άρρητο, για παράδειγμα τον $\sqrt{2}$. Επειδή $a < b$, συνεπάγεται $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$, οπότε υπάρχει ρητός r ώστε

$$a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}.$$

Συνεπάγεται

$$a < r + \sqrt{2} < b$$

και βλέπουμε αμέσως ότι ο $r + \sqrt{2}$ είναι άρρητος. □

Τώρα θα κάνουμε μια επισκόπηση της έννοιας της "δύναμης αριθμού σε αριθμό" με την απαιτούμενη μαθηματική αυστηρότητα αλλά χωρίς να επιμείνουμε σε τεχνικές λεπτομέρειες.

Κατ' αρχάς, από το γυμνάσιο ακόμη, ορίζεται η δύναμη αριθμού με ακέραιο εκθέτη ως εξής:

$$\begin{aligned}
&y^n = y \cdots y \ \ (n \text{ φορές}) && \text{αν ο } n \text{ είναι φυσικός} \\
&y^0 = 1 && \text{αν } y \neq 0 \\
&y^n = \frac{1}{y^{-n}} = \frac{1}{y \cdots y \ \ (-n \text{ φορές})} && \text{αν ο } n \text{ είναι αρνητικός ακέραιος και } y \neq 0.
\end{aligned}$$

Όταν θέλουμε να ορίσουμε την δύναμη $y^{\frac{1}{n}}$ με εκθέτη αντίστροφο φυσικού, συνειδητοποιούμε ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γινόμενο $y \cdots y$ διότι δεν έχει νόημα η έκφραση “$\frac{1}{n}$ φορές”. Ο ορισμός της δύναμης $y^{\frac{1}{n}}$ είναι ο εξής: $y^{\frac{1}{n}}$ είναι η μοναδική μη-αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = y$, δηλαδή ο αριθμός $\sqrt[n]{y}$, η n-οστή ρίζα του y, που ορίσαμε προηγουμένως:

$$y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y} \qquad \text{αν ο } n \text{ είναι φυσικός και } y \geq 0.$$

Γενικότερα, αν ο r είναι ρητός (αλλά όχι ακέραιος) και τον γράψουμε $r = \frac{m}{n}$ με $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε

$$y^r = (\sqrt[n]{y})^m \qquad \begin{array}{l} \text{αν } r \text{ είναι ρητός } > 0 \text{ και } y \geq 0 \\ \text{ή} \\ \text{αν } r \text{ είναι ρητός } \leq 0 \text{ και } y > 0. \end{array}$$

Σχόλιο: Αν ο r είναι ρητός αλλά όχι ακέραιος, δεν ορίζεται η δύναμη y^r για $y < 0$.

Στην περίπτωση της δύναμης y^x με άρρητο x η κατάσταση είναι πολύ πιο περίπλοκη. Για παράδειγμα, ένας τρόπος να ορισθεί η δύναμη

$$y^{\sqrt{2}}$$

είναι ο εξής. Σκεφτόμαστε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ο αριθμός $1.41\ldots$ και ότι οι λεγόμενες *διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις* του $\sqrt{2}$ είναι οι ρητοί αριθμοί

$$1, \quad 1.4 = \frac{14}{10}, \quad 1.41 = \frac{141}{100} \quad \text{κλπ.}$$

Επειδή αυτοί οι διαδοχικοί ρητοί αριθμοί προσεγγίζουν τον $\sqrt{2}$ θα πρέπει και οι διαδοχικές δυνάμεις

$$y^1, \quad y^{1.4} = (\sqrt[10]{y})^{14}, \quad y^{1.41} = (\sqrt[100]{y})^{141} \quad \text{κλπ}$$

να προσεγγίζουν τον $y^{\sqrt{2}}$. Έτσι, λοιπόν, μπορεί να ορισθεί ο $y^{\sqrt{2}}$ ως το όριο των αριθμών y^{r_n}, όπου r_n είναι η n-οστή δεκαδική προσέγγιση του $\sqrt{2}$. Προσέξτε: οι δυνάμεις y^{r_n} έχουν ορισθεί προηγουμένως, αφού κάθε r_n είναι ρητός αριθμός. Προφανώς, αυτό μπορεί να γίνει για κάθε άρρητο εκθέτη x, θεωρώντας τις διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις του.

Αυτή η διαδικασία μπορεί να παρουσιαστεί αργότερα, αφού πρώτα μιλήσουμε για τις έννοιες της “ακολουθίας” και του “ορίου”. Στην παρούσα φάση ταιριάζει καλύτερα ένας άλλος τρόπος ορισμού της δύναμης y^x με άρρητο εκθέτη x.

Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση $y > 1$. Ορίζουμε το σύνολο

$$X = \{y^r \mid r \in \mathbb{Q}, r < x\}.$$

Δηλαδή, θεωρούμε τις δυνάμεις του y με εκθέτες *όλους* τους ρητούς που είναι $< x$. Ενώ προηγουμένως θεωρήσαμε τις δυνάμεις του y με εκθέτες, από τους ρητούς που είναι $< x$, μόνο τις δεκαδικές προσεγγίσεις του x.
Η διαδικασία τώρα έχει ως εξής. Αποδεικνύουμε ότι το X είναι μη-κενό και άνω φραγμένο. Αν το κάνουμε αυτό, συνεπάγεται ότι το X έχει supremum το οποίο είναι αριθμός. Τέλος, ορίζουμε

$$y^x = \sup X = \sup\{y^r \mid r \in \mathbb{Q}, r < x\} \qquad \text{αν } y > 1 \text{ και ο } x \text{ είναι άρρητος.}$$

Στις περιπτώσεις $y = 1$ και $0 < y < 1$ ορίζουμε

$$\begin{aligned} 1^x &= 1 && \text{αν ο } x \text{ είναι άρρητος} \\ y^x &= \left(\frac{1}{y}\right)^{-x} && \text{αν } 0 < y < 1 \text{ και ο } x \text{ είναι άρρητος.} \end{aligned}$$

(Στην περίπτωση $0 < y < 1$ είναι $\frac{1}{y} > 1$ και ο $-x$ είναι άρρητος, οπότε ο $(\frac{1}{y})^{-x}$ έχει ορισθεί στην πρώτη περίπτωση.)
Τέλος, ορίζουμε

$$0^x = 0 \qquad \text{αν ο } x \text{ είναι άρρητος } > 0.$$

Σχόλιο: Αν ο x είναι άρρητος, δεν ορίζεται η δύναμη y^x για $y < 0$.

Μετά από κάθε ορισμό ακολουθούν οι αντίστοιχες ιδιότητες. Όταν ορίζονται οι δυνάμεις με ακέραιους εκθέτες, αποδεικνύονται οι ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες. Για παράδειγμα η γνωστή ιδιότητα $y^{n+m} = y^n y^m$. Αφού ορισθούν οι δυνάμεις με ρητούς εκθέτες, αποδεικνύονται οι ίδιες ιδιότητες αλλά για ρητούς εκθέτες. Τέλος, αφού ορισθούν οι δυνάμεις με άρρητους εκθέτες, αποδεικνύονται οι ιδιότητες των δυνάμεων με γενικούς πραγματικούς εκθέτες. Σε κάθε στάδιο χρησιμοποιούνται οι ήδη αποδειχθείσες ιδιότητες στα προηγούμενα στάδια.

Τέλος, φτάνουμε στην εξίσωση

$$a^x = y$$

με δοσμένο $a > 0, a \neq 1$, όπου ο y παίρνει τιμές > 0 και ο x είναι άγνωστος και έχουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Για κάθε $y > 0$ η εξίσωση $a^x = y$ με άγνωστο x έχει μοναδική λύση.*

Απόδειξη. Στην περίπτωση $a > 1$ και $y > 1$ ορίζουμε το σύνολο

$$X = \{x \mid a^x \leq y\},$$

αποδεικνύουμε ότι το X είναι μη-κενό και άνω φραγμένο, συμπεραίνουμε ότι έχει supremum το οποίο είναι αριθμός, θέτουμε

$$\xi = \sup X$$

και αποδεικνύουμε ότι $a^\xi = y$, δηλαδή ότι το supremum του X είναι λύση της $a^x = y$. Κατόπιν, χειριζόμαστε και τις υπόλοιπες περιπτώσεις για τους a, y με βάση την πρώτη περίπτωση.
Τέλος, αποδεικνύουμε την μοναδικότητα της λύσης.
(Όπως είπαμε παραπάνω, παραλείπουμε τις λεπτομέρειες. Το Θεώρημα αυτό είναι το Θεώρημα 1.3 του βιβλίου.) □

Ακολουθούν οι ιδιότητες των λογαρίθμων.

Κάναμε, λοιπόν, μια σκιαγράφηση της εισαγωγής της έννοιας της δύναμης και της έννοιας του λογαρίθμου. Σκοπός ήταν να γίνει κατανοητός ο ρόλος της Ιδιότητας Supremum στους ορισμούς των εννοιών: στην ύπαρξη n-οστών ριζών (η προϋπόθεση για να ορισθούν οι δυνάμεις με ρητούς μη-ακέραιους εκθέτες), στον ορισμό των δυνάμεων με άρρητους εκθέτες και στον ορισμό των λογαρίθμων. Όλα αυτά περιγράφονται με σχετική πληρότητα στην ενότητα 1.4 του βιβλίου. *Σε πρώτη ανάγνωση μπορεί κάποιος να μην διαβάσει τα Λήμματα 1.2, 1.3 και 1.4, την απόδειξη της Πρότασης 1.8 (η* *οποία περιγράφει τις βασικές ιδιότητες των δυνάμεων) και την απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.* Όλα αυτά περιέχουν πολλές τεχνικές λεπτομέρειες και είναι αρκετά κουραστικά ειδικά σ' αυτό το στάδιο των σπουδών. Για το μάθημα Ανάλυση 1 θεωρώ ότι είναι υπεραρκετό να καταλάβετε πλήρως την απόδειξη της ύπαρξης των n-οστών ριζών (στην περίπτωση $n = 2$) και να κατανοήσετε το γενικό περίγραμμα των εννοιών της δύναμης και του λογαρίθμου και τον ρόλο της έννοιας του supremum σ' αυτές.

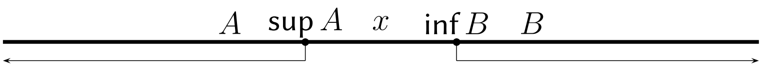
Τώρα, ασκήσεις.

Άσκηση 1.2.13. *Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε $A \cup B = \mathbb{R}$ και ώστε να ισχύει $x < y$ για κάθε $x \in A, y \in B$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε $A = (-\infty, \xi)$, $B = [\xi, +\infty)$ ή $A = (-\infty, \xi]$, $B = (\xi, +\infty)$.*

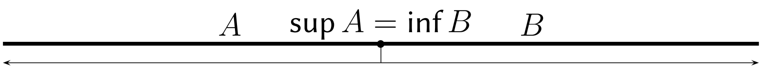
Λύση: Κατ' αρχάς η υπόθεση $A \cup B = \mathbb{R}$ λέει ότι κάθε αριθμός ανήκει σε ένα τουλάχιστον από τα A, B. Επίσης, η *γνήσια* ανισότητα $x < y$ λέει ότι τα A, B δεν έχουν κοινό στοιχείο. Άρα κάθε αριθμός ανήκει σε ακριβώς ένα από τα A, B. Με άλλα λόγια τα A, B αποτελούν *διαμέριση* του $\mathbb{R}$.
Τώρα, βάσει του αποτελέσματος της άσκησης 1.2.12[α], συμπεραίνουμε ότι

$$\sup A \leq \inf B.$$

Προφανώς, το σύνολο A βρίσκεται αριστερά (με την ευρεία έννοια) του $\sup A$ και το B βρίσκεται δεξιά (με την ευρεία έννοια) του $\inf B$. Προσπαθώντας να σχεδιάσουμε την κατάσταση, διακρίνουμε δυο περιπτώσεις. Η πρώτη είναι όταν $\sup A < \inf B$.



Όμως, σ' αυτήν την περίπτωση κάθε αριθμός στο ανοικτό διάστημα ανάμεσα στους $\sup A, \inf B$, για παράδειγμα ο $\frac{\sup A + \inf B}{2}$, δεν ανήκει σε κανένα από τα σύνολα A, B. Άρα μένει η περίπτωση $\sup A = \inf B$.



Θέτουμε

$$\xi = \sup A = \inf B.$$

Τώρα, κάθε $x < \xi$ δεν μπορεί να ανήκει στο B, οπότε ανήκει στο A. Επίσης, κάθε $x > \xi$ δεν μπορεί να ανήκει στο A, οπότε ανήκει στο B. Τέλος, ο ίδιος ο ξ πρέπει να ανήκει σε ένα ακριβώς από τα A, B. Αν $\xi \in A$, τότε προφανώς $A = (-\infty, \xi]$ και $B = (\xi, +\infty)$. Αν $\xi \in B$, τότε $A = (-\infty, \xi)$, $B = [\xi, +\infty)$.

Άσκηση 1.2.15. *Έστω μη-κενά σύνολα A, B με $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι*

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Λύση: Η ανισότητα $\inf A \leq \sup A$ είναι γνωστή. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $\inf B \leq \inf A$ και $\sup A \leq \sup B$.
Θα αποδείξουμε την δεύτερη ανισότητα με τα supremum και θα αποδείξετε εσείς την πρώτη ανισότητα με παρόμοιο τρόπο.
Πρώτος τρόπος: Σκεφτόμαστε ότι το να είναι το supremum ενός συνόλου μικρότερο ή

ίσο ενός αριθμού ισοδυναμεί με το να είναι ο αριθμός αυτός άνω φράγμα του συνόλου. Όταν, λοιπόν, θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει $\sup A \leq \sup B$, είναι αρκετό (και μάλιστα ισοδύναμο) να αποδείξουμε ότι το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A.
Πράγματι, για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \in B$, οπότε ισχύει $x \leq \sup B$. Άρα το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A και, επομένως, $\sup A \leq \sup B$.

Ανοίγει παρένθεση: Στα προηγούμενα δεν διακρίναμε περιπτώσεις για το αν τα σύνολα είναι άνω φραγμένα ή όχι: εξ άλλου στην πρώτη πρόταση "το να είναι το supremum ενός συνόλου μικρότερο ή ίσο ενός αριθμού ισοδυναμεί με το να είναι ο αριθμός αυτός άνω φράγμα του συνόλου" μιλάμε για "αριθμό" ενώ στα επόμενα δεν αναφερόμαστε στο αν το $\sup B$ (που παίζει τον ρόλο του "αριθμού") είναι αριθμός ή $+\infty$. Αυτό, όμως, είναι στην πραγματικότητα ακίνδυνο. Σε όλες τις προτάσεις που αποτελούν την παραπάνω απόδειξη οι διάφορες ποσότητες "supremum" και "άνω φράγμα" μπορούν να ερμηνευθούν είτε ως αριθμοί είτε ως $+\infty$ χωρίς κίνδυνο λάθους. Ας τα πάρουμε ένα-ένα. Η πρώτη πρόταση μπορεί να διατυπωθεί "το να είναι το supremum ενός συνόλου μικρότερο ή ίσο μιας ποσότητας ισοδυναμεί με το να είναι η ποσότητα αυτή άνω φράγμα του συνόλου". Εδώ η ποσότητα για την οποία μιλάμε μπορεί να είναι είτε αριθμός (οπότε καταλήγουμε σε κάτι γνωστό) είτε $+\infty$, αφού το supremum ενός συνόλου είναι πάντοτε μικρότερο ή ίσο του $+\infty$ και συγχρόνως το $+\infty$ είναι πάντοτε άνω φράγμα ενός συνόλου. Η δεύτερη πρόταση "για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \in B$, οπότε ισχύει $x \leq \sup B$" είναι σωστή είτε το $\sup B$ είναι αριθμός (δηλαδή το B είναι άνω φραγμένο) είτε το $\sup B$ είναι $+\infty$ (δηλαδή το B δεν είναι άνω φραγμένο). Τέλος, η τρίτη πρόταση "το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A και, επομένως, $\sup A \leq \sup B$" είναι σωστή είτε το $\sup B$ είναι αριθμός (οπότε το A είναι άνω φραγμένο και το $\sup A$ είναι κι αυτό αριθμός) είτε το $\sup B$ είναι $+\infty$ (οπότε το $\sup B = +\infty$ είναι άνω φράγμα του A και το A είναι είτε άνω φραγμένο είτε όχι άνω φραγμένο αλλά και πάλι ισχύει ούτως ή άλλως $\sup A \leq \sup B = +\infty$).
Αν κάποιος θέλει να αισθάνεται ασφαλής με τους όρους που χρησιμοποιεί, μπορεί να είναι τυπικός και να διακρίνει περιπτώσεις. Ας το κάνουμε.
Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\sup A \leq \sup B$ με την υπόθεση $A \subseteq B$.
Έστω ότι το B είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup B < +\infty$. Επειδή για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \in B$, συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \leq \sup B$. Άρα το A είναι άνω φραγμένο και ο (αριθμός) $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A. Άρα $\sup A \leq \sup B$.
Έστω ότι το B δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup B = +\infty$. Τότε, όμως, η ανισότητα $\sup A \leq \sup B$ είναι σωστή είτε το $\sup A$ είναι αριθμός είτε το $\sup A$ είναι $+\infty$.
Κλείνει η παρένθεση.

Δεύτερος τρόπος: Υποθέτουμε (για άτοπο) ότι $\sup B < \sup A$.
Από την δεύτερη χαρακτηριστική ιδιότητα του $\sup A$ συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιος $x \in A$ ώστε

$$\sup B < x \leq \sup A.$$

Όμως, επειδή $x \in A$ πρέπει να είναι $x \in B$. Αυτό αντιφάσκει με το ότι $\sup B < x$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα $\sup A \leq \sup B$.

Άσκηση 1.3.3. *Βρείτε το infimum και το supremum του συνόλου*

$$(a, b) \cap \mathbb{Q} = \{r \mid a < r < b, r \in \mathbb{Q}\}.$$

Λύση: Κατ' αρχάς προσπαθούμε να σχεδιάσουμε το σύνολο $A = (a, b) \cap \mathbb{Q}$.

Είναι αδύνατο να σχεδιάσουμε το σύνολο A με απόλυτη πιστότητα. Το σύνολο A έχει άπειρα στοιχεία και μάλιστα, λόγω της πυκνότητας των ρητών, σε κάθε υποδιάστημα του (a, b), οσοδήποτε μικρό, υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A. Από την άλλη μεριά, δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε το A με μια *πλήρη, συνεχή γραμμή* ανάμεσα στα a, b, διότι και οι άρρητοι είναι πυκνοί. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε υποδιάστημα του (a, b) υπάρχουν άπειροι άρρητοι, δηλαδή άπειρα στοιχεία εκτός του A. Φτιάχνουμε μια "σχετικά επαρκή" εικόνα του A αν ζωγραφίσουμε όσο το δυνατόν περισσότερα σημεία (στοιχεία του A) ανάμεσα στους a, b φροντίζοντας συγχρόνως να υπάρχουν όσο το δυνατό περισσότερα κενά (στοιχεία εκτός του A) ανάμεσα στα προηγούμενα σημεία. Απλοϊκά: τα στοιχεία του A είναι "παντού" στο διάστημα (a, b) αλλά και τα στοιχεία εκτός του A είναι "παντού" στο (a, b).
Είναι σαφές από το σχήμα ότι ο b είναι άνω φράγμα του A αλλά και ότι όσο κοντά θέλουμε στον b υπάρχει στοιχείο του A. Άρα ο b είναι το supremum του A.
Ας εργαστούμε, όμως, με λίγο πιο τυπική μαθηματική γλώσσα.
Προφανώς, ο b είναι άνω φράγμα του A (διότι το A περιέχεται στο (a, b)).
Υποθέτουμε (για άτοπο) ότι κάποιος $u < b$ είναι άνω φράγμα του A. Είναι προφανές ότι $a \leq u$, διότι δεν υπάρχει στοιχείο του A δεξιά του a. Λόγω της πυκνότητας των ρητών, υπάρχει ρητός r ώστε $u < r < b$. Συνεπάγεται $a < r < b$ (διότι $a \leq u$), οπότε ο r είναι στοιχείο του A. Άρα υπάρχει στοιχείο του A το οποίο είναι $> u$ και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού το u είναι άνω φράγμα του A.
Άρα δεν υπάρχει άνω φράγμα του A που να είναι $< b$, οπότε το ελάχιστο άνω φράγμα του A είναι ο b.
Αποδείξτε με τον ίδιο τρόπο ότι $a = \inf A$ και, κατόπιν, λύστε και την άσκηση 1.4.1 με το σύνολο

$$(a, b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{x \,|\, a < x < b, x \notin \mathbb{Q}\}.$$