ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 17-12-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Άσκηση 4.1.9. [α] *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

είναι ασυνεχής σε κάθε x.

Πρώτη λύση: Παίρνουμε ένα οποιονδήποτε x. Θα βρούμε ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει κάποιο t ώστε $|t - x| < \delta$ και $|f(t) - f(x)| \geq \epsilon$. Αυτό ακριβώς είναι η άρνηση του ορισμού της συνέχειας στο x και, επομένως, η f θα είναι ασυνεχής στο x.
Πρώτη περίπτωση: Έστω $x \in \mathbb{Q}$. Τότε $f(x) = 1$.
Αν θέλουμε να πετύχουμε να ισχύει $|f(t)-f(x)| = |f(t)-1| \geq \epsilon > 0$, τότε αναγκαστικά ο t πρέπει να είναι άρρητος, διότι αν ο t είναι ρητός τότε $|f(t) - f(x)| = |1 - 1| = 0$. Μάλιστα, αν ο t είναι πράγματι άρρητος τότε θα είναι $|f(t) - f(x)| = |0 - 1| = 1$ και θα ισχύει $|f(t) - f(x)| \geq \epsilon$ αρκεί να έχουμε φροντίσει να επιλέξουμε $\epsilon \leq 1$.
Μετά από αυτά τα προκαταρκτικά, επιλέγουμε έναν ϵ τέτοιον ώστε $0 < \epsilon \leq 1$ (για παράδειγμα $\epsilon = 1$ ή $\epsilon = \frac{1}{2}$). Τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ στο διάστημα $(x - \delta, x + \delta)$. Ένας τέτοιος t ικανοποιεί την $|t - x| < \delta$ αλλά δεν ικανοποιεί την $|f(t) - f(x)| < \epsilon$, αφού $|f(t) - f(x)| = |0 - 1| = 1 \geq \epsilon$.
Δεύτερη περίπτωση: Έστω $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Τότε $f(x) = 0$.
Σκεφτόμαστε όπως και στην πρώτη περίπτωση και καταλήγουμε πάλι στο εξής.
Επιλέγουμε έναν ϵ τέτοιον ώστε $0 < \epsilon \leq 1$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $t \in \mathbb{Q}$ στο διάστημα $(x - \delta, x + \delta)$. Ένας τέτοιος t ικανοποιεί την $|t - x| < \delta$ αλλά δεν ικανοποιεί την $|f(t) - f(x)| < \epsilon$, αφού $|f(t) - f(x)| = |1 - 0| = 1 \geq \epsilon$.

Δεύτερη λύση: Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο x, τότε γνωρίζουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \to x$ συνεπάγεται $f(x_n) \to f(x)$.
Άρα για να αποδείξουμε ότι η f είναι ασυνεχής στο x, αρκεί να βρούμε μία ακολουθία (x_n) με $x_n \to x$ για την οποία δεν ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.
Γνωρίζουμε, όμως, ότι για κάθε x υπάρχει ακολουθία (x_n) είτε με όλους τους όρους της ρητούς είτε με όλους τους όρους της άρρητους ώστε $x_n \to x$. (Πράγματι, αυτό γίνεται επιλέγοντας για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έναν ρητό ή άρρητο x_n ώστε $x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n}$.) Οπότε έχουμε δυο περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση: Έστω $x \in \mathbb{Q}$, οπότε $f(x) = 1$.
Υπάρχει ακολουθία (x_n) με όλους τους όρους της άρρητους ώστε $x_n \to x$. Τότε, όμως, ισχύει $f(x_n) = 0$ για κάθε n, οπότε $f(x_n) \to 0$ και έτσι δεν ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.
Δεύτερη περίπτωση: Έστω $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, οπότε $f(x) = 0$.
Υπάρχει ακολουθία (x_n) με όλους τους όρους της ρητούς ώστε $x_n \to x$. Τότε ισχύει $f(x_n) = 1$ για κάθε n, οπότε $f(x_n) \to 1$ και έτσι δεν ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.

[β] *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$ και συνεχής στο $x = 0$.

Λύση: Έστω $x \neq 0$.
Πρώτη περίπτωση: Έστω $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, οπότε $f(x) = x \neq 0$.
Υπάρχει ακολουθία (x_n) με όλους τους όρους της άρρητους ώστε $x_n \to x$. Τότε ισχύει

$f(x_n) = 0$ για κάθε n, οπότε $f(x_n) \to 0$ και έτσι δεν ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.
Δεύτερη περίπτωση: Έστω $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, οπότε $f(x) = 0$.
Υπάρχει ακολουθία (x_n) με όλους τους όρους της ρητούς ώστε $x_n \to x$. Τότε ισχύει $f(x_n) = x_n$ για κάθε n, οπότε $f(x_n) \to x$ και έτσι δεν ισχύει $f(x_n) \to f(x)$.
Άρα σε κάθε περίπτωση η f είναι ασυνεχής στο x.

Τώρα έστω $x = 0$.
Πρώτος τρόπος: Από τον τύπο της συνάρτησης συνεπάγεται αμέσως ότι ισχύει

$$-|x| \leq f(x) \leq |x|$$

για κάθε x. Άρα από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0),$$

οπότε η f είναι συνεχής στο $x = 0$.
Δεύτερος τρόπος: Για να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \to 0$ ισχύει $f(x_n) \to f(0) = 0$.
Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) με $x_n \to 0$ και διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.
Αν ισχύει τελικά $x_n \in \mathbb{Q}$ (δηλαδή αν από έναν δείκτη και πέρα όλοι οι όροι της (x_n) είναι ρητοί), τότε ισχύει τελικά $f(x_n) = x_n$ και, επομένως, $f(x_n) \to 0$.
Αν ισχύει τελικά $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (δηλαδή αν από έναν δείκτη και πέρα όλοι οι όροι της (x_n) είναι άρρητοι), τότε ισχύει τελικά $f(x_n) = 0$ και, επομένως, $f(x_n) \to 0$.
Η τρίτη περίπτωση είναι να έχει η (x_n) άπειρους ρητούς όρους και άπειρους άρρητους όρους. Τότε η (x_n) χωρίζεται σε δύο ακριβώς υποακολουθίες, την (x'_n) και την (x''_n), όπου η πρώτη αποτελείται από τους ρητούς όρους και η δεύτερη από τους άρρητους όρους της (x_n). Επειδή $x_n \to 0$, συνεπάγεται $x'_n \to 0$ και $x''_n \to 0$. Όπως είδαμε πριν, έχουμε $f(x'_n) = x'_n \to 0$ και $f(x''_n) = 0 \to 0$. Επειδή οι δυο υποακολουθίες $\big(f(x'_n)\big)$ και $\big(f(x''_n)\big)$ σχηματίζουν ολόκληρη την ακολουθία $(f(x_n))$ συνεπάγεται ότι $f(x_n) \to 0$.
Άρα η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

Παρατήρηση: Στο τέλος της απόδειξης χρησιμοποιήσαμε την εξής ιδιότητα των ακολουθιών.
Αν μια ακολουθία (y_n) χωρισθεί σε ακριβώς δυο υποακολουθίες (y'_n) και (y''_n) (όπως για παράδειγμα οι υποακολουθίες των άρτιων και των περιττών δεικτών) και αν $y'_n \to y$ και $y''_n \to y$, τότε $y_n \to y$.
Αυτήν την ιδιότητα δεν την έχουμε αποδείξει. Η απόδειξή της είναι παρόμοια με την απόδειξη στην περίπτωση των υποακολουθιών με τους άρτιους και τους περιττούς δείκτες.

Παρατήρηση: Μπορούμε να κάνουμε και μια άλλου τύπου απόδειξη ως εξής. Από τον τύπο της συνάρτησης έχουμε ότι

$$\lim_{x \in \mathbb{Q}, x \to 0} f(x) = \lim_{x \in \mathbb{Q}, x \to 0} x = 0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x \to 0} f(x) = \lim_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x \to 0} 0 = 0.$$

Τώρα, επειδή τα σύνολα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ σχηματίζουν ολόκληρο το $\mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Αυτό αποτελεί ειδική περίπτωση μιας γενικότερης ιδιότητας.
Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω $A = B \cup C$ με $B \cap C = \emptyset$. Αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης και του B και του C και αν $\lim_{x \in B, x \to \xi} f(x) = l$ και $\lim_{x \in C, x \to \xi} f(x) = l$, τότε

$\lim_{x\in A, x\to\xi} f(x) = l$.

Δεν θα αποδείξουμε ατήν την ιδιότητα. Όποιος θέλει μπορεί να το κάνει. Δεν είναι πολύ δύσκολο. Πάντως η ιδιότητα αυτή είναι εντελώς ανάλογη της ιδιότητας των ακολουθιών που αναφέραμε στην πρώτη παρατήρηση. Και στις δυο περιπτώσεις χωρίζουμε το πεδίο ορισμού (το σύνολο στο οποίο τρέχει η ανεξάρτητη μεταβλητή) σε δυο ξένα υποσύνολα. Στη πρώτη περίπτωση χωρίζουμε το $\mathbb{N}$ σε δυο υποσύνολα (για παράδειγμα το σύνολο των άρτιων και το σύνολο των περιττών φυσικών) και στην δεύτερη περίπτωση χωρίζουμε το A στα B και C (για παράδειγμα το $\mathbb{R}$ στα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$).

Άσκηση 4.2.10. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Αν $f(a) = 0$ και $f(b) \neq 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει μέγιστη ρίζα της f στο $[a,b]$.*

Λύση: Θεωρούμε το σύνολο των ριζών της f στο $[a,b]$:

$$X = \{x \,|\, a \leq x \leq b, f(x) = 0\}.$$

Το X είναι μη-κενό (διότι $a \in X$) και άνω φραγμένο (διότι $X \subseteq [a,b]$). Άρα το X έχει supremum το οποίο είναι αριθμός. Θέτουμε

$$\xi = \sup X.$$

Επειδή $a \in X$, συνεπάγεται $a \leq \xi$. Και επειδή το b είναι άνω φράγμα του X, συνεπάγεται $\xi \leq b$. Άρα $\xi \in [a,b]$, οπότε η f είναι συνεχής στο ξ.

Από τη δεύτερη ιδιότητα του supremum συνεπάγεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει κάποιο $x_n \in X$ ώστε

$$\xi - \frac{1}{n} < x_n \leq \xi.$$

Επομένως,

$$x_n \to \xi$$

και, επειδή η f είναι συνεχής στο ξ, έχουμε

$$f(x_n) \to f(\xi).$$

Όμως, ισχύει $x_n \in X$ και, επομένως,

$$f(x_n) = 0$$

για κάθε n. Άρα

$$f(x_n) \to 0.$$

Λόγω μοναδικότητας ορίου:

$$f(\xi) = 0.$$

Άρα $\xi \in X$ και επειδή το ξ είναι το supremum του X, συμπεραίνουμε ότι το ξ είναι η μέγιστη ρίζα της f στο $[a,b]$.