ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΕΚΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 18-10-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Άσκηση 1.2.16. [γ] *Για τα μη-κενά σύνολα A, B ορίζουμε*

$$A + B = \{x + y \,|\, x \in A, y \in B\}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Λύση: Πρώτα θα αποδείξουμε ότι $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$.
Για να το πετύχουμε, αρκεί να αποδείξουμε ότι η ποσότητα $\sup A + \sup B$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $A + B$ (είτε αυτή η ποσότητα είναι αριθμός είτε είναι $+\infty$).
Για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \leq \sup A$ και για κάθε $y \in B$ ισχύει $y \leq \sup B$. Προσθέτουμε και έχουμε ότι για κάθε $x \in A$, $y \in B$ ισχύει

$$x + y \leq \sup A + \sup B.$$

(Σ' αυτήν την πράξη δεν υπάρχει πρόβλημα ακόμη κι αν ένα ή και τα δύο από τα $\sup A$, $\sup B$ είναι $+\infty$.)
Άρα η ποσότητα $\sup A + \sup B$ είναι άνω φράγμα του $A + B$, οπότε

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B.$$

(Υπονοείται ότι: αν το $\sup A + \sup B$ είναι αριθμός, τότε το $A + B$ είναι άνω φραγμένο και το ελάχιστο άνω φράγμα του είναι $\leq$ από το $\sup A + \sup B$ ενώ, αν το $\sup A + \sup B$ είναι $+\infty$ τότε είναι αυτομάτως άνω φράγμα του $A + B$ και αυτομάτως ισχύει $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$ είτε το $\sup(A + B)$ είναι αριθμός είτε είναι $+\infty$.)
Τώρα θα αποδείξουμε ότι $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$ και η απόδειξη θα τελειώσει.
Πρώτος τρόπος. Για κάθε $x \in A$, $y \in B$ το $x + y$ είναι στοιχείο του $A + B$, οπότε ισχύει

$$x + y \leq \sup(A + B).$$

Τώρα *σταθεροποιούμε προσωρινά* ένα τυχόν $y \in B$ και έχουμε ότι ισχύει

$$x \leq \sup(A + B) - y$$

για κάθε $x \in A$. Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα $\sup(A + B) - y$ είναι άνω φράγμα του συνόλου A (σκεφτείτε πάλι τις πιθανές περιπτώσεις $\sup(A + B) - y < +\infty$ και $\sup(A + B) - y = +\infty$). Συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\sup A \leq \sup(A + B) - y$$

για κάθε $y \in B$. (Αποσταθεροποιούμε τον τυχόντα $y \in B$ που είχαμε προσωρινά σταθεροποιήσει.)
Τώρα, στην τελευταία ανισότητα οι $\sup A$ και y θα αλλάξουν πλευρές. Με τον y δεν υπάρχει πρόβλημα διότι είναι αριθμός. Όμως δεν μπορεί να γίνει το ίδιο με το $\sup A$ αν είναι $+\infty$. Γι αυτό διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
Αν το $\sup A$ είναι αριθμός, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$y \leq \sup(A + B) - \sup A$$

για κάθε $y \in B$. Άρα η ποσότητα $\sup(A + B) - \sup A$ είναι άνω φράγμα του B, οπότε

$$\sup B \leq \sup(A + B) - \sup A$$

και (πάλι επειδή το $\sup A$ είναι αριθμός) συνεπάγεται

$$\sup A + \sup B \le \sup(A + B).$$

Αν $\sup A = +\infty$, τότε από την ανισότητα $\sup A \le \sup(A+B) - y$ στην οποία είχαμε φτάσει πριν διακρίνουμε περιπτώσεις συνεπάγεται ότι επίσης $\sup(A+B) = +\infty$ και, επομένως, η ανισότητα

$$\sup A + \sup B \le \sup(A + B)$$

στην οποία θέλουμε να καταλήξουμε ισχύει ως ισότητα.
Δεύτερος τρόπος: Υποθέτουμε ότι

$$\sup(A + B) < \sup A + \sup B$$

και θα καταλήξουμε σε άτοπο.
Τότε βλέπουμε αμέσως ότι το $\sup(A + B)$ είναι αναγκαστικά αριθμός. Δηλαδή το σύνολο $A + B$ είναι άνω φραγμένο, οπότε υπάρχει κάποιος αριθμός u ώστε να ισχύει

$$x + y \le u$$

για κάθε $x \in A, y \in B$. Παίρνοντας οποιονδήποτε $y_0 \in B$, βλέπουμε ότι ισχύει

$$x \le u - y_0$$

για κάθε $x \in A$. Άρα το A είναι άνω φραγμένο, οπότε το $\sup A$ είναι αριθμός. Με το ίδιο επιχείρημα βλέπουμε ότι και το B είναι άνω φραγμένο, οπότε και το $\sup B$ είναι αριθμός. Δηλαδή στην ανισότητα

$$\sup(A + B) < \sup A + \sup B$$

όλες οι ποσότητες είναι αριθμοί.
Τώρα η ιδέα είναι να βρούμε ένα $x \in A$ πολύ κοντά στο $\sup A$ και ένα $y \in B$ πολύ κοντά στο $\sup B$ έτσι ώστε το $x + y$ να είναι πολύ κοντά στο $\sup A + \sup B$. Πόσο κοντά; Κοντύτερα από όσο είναι το $\sup(A + B)$ στο $\sup A + \sup B$. Αυτό θα δώσει ότι το $x+y$ είναι μεγαλύτερο από το $\sup(A+B)$ και θα φτάσουμε στο άτοπο που θέλουμε.
Θέτουμε

$$\epsilon = (\sup A + \sup B) - \sup(A + B) > 0.$$

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $x \in A$ ώστε

$$\sup A - \frac{\epsilon}{2} < x \le \sup A$$

και ότι υπάρχει $y \in B$ ώστε

$$\sup B - \frac{\epsilon}{2} < y \le \sup B.$$

Προσθέτουμε και έχουμε ότι γι αυτό το $x \in A$ και γι αυτό το $y \in B$ ισχύει

$$(\sup A + \sup B) - \epsilon < x + y$$

και, λόγω της συγκεκριμένης επιλογής του ϵ,

$$\sup(A + B) < x + y.$$

Όμως, το $x + y$ είναι στοιχείο του $A + B$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Άσκηση 1.3.5 (Παραλλαγή). *Αν ισχύει $r \geq a$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r > b$, αποδείξτε ότι $b \geq a$.*

Αν $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < a\} = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < b\}$, αποδείξτε ότι $a = b$.

Λύση: Πρώτο ερώτημα.
Έστω (για άτοπο) $b < a$. Από την πυκνότητα των ρητών συνεπάγεται ότι υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ ώστε $b < r < a$. Αυτό είναι άτοπο, διότι η υπόθεση λέει ότι κάθε ρητός που είναι $> b$ πρέπει να είναι και $\geq a$.

Δεύτερο ερώτημα.
Η υπόθεση λέει ότι οι ρητοί που είναι $< a$ είναι οι ίδιοι με τους ρητούς που είναι $< b$.
Έστω (για άτοπο) $a < b$. Από την πυκνότητα των ρητών συνεπάγεται ότι υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ ώστε $a < r < b$. Άρα υπάρχει ρητός που είναι $< b$ αλλά δεν είναι $< a$ και αυτό είναι άτοπο. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει άτοπο αν $b < a$. Άρα $a = b$.

Άσκηση 1.3.2 (Παραλλαγή). *Βρείτε το supremum και το infimum καθενός από τα σύνολα:*

(i) $A = \{(-1)^n n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) $B = \{(-1)^n - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

(iii) $C = \{\frac{1}{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 - \frac{1}{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Λύση: (i) Σχεδιάζουμε το σύνολο $A = \{(-1)^n n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Το σύνολο A περιέχει όλους τους θετικούς άρτιους και όλους τους αρνητικούς περιττούς. Είναι σαφές ότι το σύνολο δεν είναι άνω φραγμένο ούτε κάτω φραγμένο.
Αν το σύνολο ήταν άνω φραγμένο θα υπήρχε αριθμός u ώστε να ισχύει

$$2k \leq u$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπάγεται

$$k \leq \frac{u}{2}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αλλά αυτό είναι άτοπο διότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.
Άρα το σύνολο δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup A = +\infty$.
Αν το σύνολο ήταν κάτω φραγμένο θα υπήρχε αριθμός l ώστε να ισχύει

$$l \leq -(2k - 1)$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπάγεται

$$k \leq \frac{-l + 1}{2}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αυτό είναι άτοπο διότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.
Άρα το σύνολο δεν είναι κάτω φραγμένο, οπότε $\inf A = -\infty$.

(ii) Σχεδιάζουμε το σύνολο $B = \{(-1)^n - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ βλέποντας ότι από τους περιττούς φυσικούς n προκύπτουν τα στοιχεία $-1 - \frac{1}{2k-1}$, δηλαδή τα

$$-1 - 1 = -2, \quad -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}, \quad -1 - \frac{1}{5} = -\frac{6}{5} \qquad \text{κλπ}$$

ενώ από τους άρτιους φυσικούς προκύπτουν τα στοιχεία $1-\frac{1}{2k}$, δηλαδή τα

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},\quad 1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}\qquad \text{κλπ}$$

Τα πρώτα στοιχεία βρίσκονται μέσα στο διάστημα $[-2,-1]$ ενώ τα δεύτερα στοιχεία βρίσκονται μέσα στο διάστημα $[\frac{1}{2},1]$.
Είναι προφανές ότι το μικρότερο στοιχείο του B είναι ο -2, οπότε

$$\inf B = \min B = -2.$$

Το supremum του B θα προκύψει από τα δεύτερα στοιχεία τα οποία "πλησιάζουν" τον αριθμό 1, ο οποίος είναι άνω φράγμα του B.
Προφανώς, ο 1 είναι άνω φράγμα του B.
Αν υπήρχε άνω φράγμα $u<1$ του B, τότε θα ίσχυε

$$1-\frac{1}{2k}\leq u<1$$

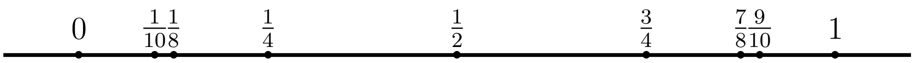
για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Άρα θα ίσχυε

$$k\leq\frac{1}{2(1-u)}$$

για κάθε $k\in\mathbb{N}$, αλλά αυτό είναι άτοπο διότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.
(Με άλλο τρόπο: θα ίσχυε $0<2(1-u)\leq 1k$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$ αλλά αυτό είναι άτοπο βάσει της Αρχιμήδειας Ιδιότητας.)
Άρα δεν υπάρχει άνω φράγμα του B το οποίο να είναι <1, οπότε

$$\sup B = 1.$$

(iii) Σχεδιάζουμε το $C=\{\frac{1}{2n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}\cup\{1-\frac{1}{2n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$.



Όλα τα στοιχεία του C βρίσκονται στο διάστημα $[-1,1]$. Κάποια από αυτά "πλησιάζουν" τον 0 και κάποια άλλα "πλησιάζουν" τον 1.
Ο 1 είναι προφανώς άνω φράγμα του C. Αν υπήρχε άνω φράγμα $u<1$ του C, θα ίσχυε

$$1-\frac{1}{2n}\leq u<1$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Άρα θα ίσχυε

$$0<2(1-u)\leq\frac{1}{n}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$, αλλά αυτό είναι άτοπο εξ αιτίας της Αρχιμήδειας Ιδιότητας.
Άρα δεν υπάρχει άνω φράγμα του C που να είναι <1, οπότε

$$\sup C = 1.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\inf C = 0.$$

Στο επόμενο μάθημα θα μιλήσουμε πιο τυπικά για ακολουθίες, αλλά μια και έχετε ξαναδεί την έννοια της ακολουθίας στο μάθημα του Απειροστικού Λογισμού 1, στον λίγο χρόνο που έμεινε θα δούμε μια άσκηση για ακολουθίες.

Άσκηση 2.1.6. *Είναι οι ακολουθίες* $(\frac{13^n}{n!})$ *και* $(\frac{n^{30}}{2^n})$ *μονότονες; άνω φραγμένες;*

Λύση: Για να δούμε αν μια ακολουθία είναι μονότονη συνήθως κοιτάμε τους πρώτους όρους της. Όμως, πολλές φορές αυτό είναι παραπλανητικό.
Οι πρώτοι όροι της πρώτης ακολουθίας

$$x_n = \frac{13^n}{n!}$$

είναι οι

$$\frac{13^1}{1!} = 13, \quad \frac{13^2}{2!} = 84.5, \quad \frac{13^3}{3!} = 366.16\ldots, \quad \frac{13^4}{4!} = 1190.04\ldots \qquad \text{κλπ}$$

Κρίνοντας από τους πρώτους όρους της ακολουθίας υποψιαζόμαστε ότι αυτή είναι γνησίως αύξουσα. Πρέπει, όμως, να το αποδείξουμε. Ελέγχουμε, λοιπόν, αν ισχύει

$$\frac{13^n}{n!} < \frac{13^{n+1}}{(n+1)!}$$

για κάθε n ή τουλάχιστον για ποιούς φυσικούς n ισχύει κάτι τέτοιο.
Εύκολα βλέπουμε ότι η ανισότητα αυτή ισοδυναμεί με την

$$n < 12$$

ενώ η αντίθετη ανισότητα

$$\frac{13^n}{n!} > \frac{13^{n+1}}{(n+1)!}$$

ισοδυναμεί με

$$n > 12.$$

Άρα ισχύει

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{11} < x_{12} = x_{13} > x_{14} > x_{15} > \ldots$$

και η ακολουθία είναι τελικά γνησίως φθίνουσα (μετά από τον δέκατο τρίτο όρο της).
Προφανώς, η ακολουθία είναι και φραγμένη. Ένα κάτω φράγμα της είναι ο 0 και ένα άνω φράγμα της είναι ο $x_{12} = x_{13} = \frac{13^{12}}{12!}$.
Οι πρώτοι όροι της δεύτερης ακολουθίας

$$x_n = \frac{n^{30}}{2^n}$$

είναι οι

$$\frac{1^{30}}{2^1} = 0.5, \quad \frac{2^{30}}{2^2}, \quad \frac{3^{30}}{2^3}, \quad \frac{4^{30}}{2^4}\ldots \qquad \text{κλπ}$$

Ο πρώτος όρος είναι μικρός. Ο δεύτερος όρος είναι τόσο μεγάλος που δεν επιχειρούμε καν να γράψουμε τα δεκαδικά του ψηφία. Είναι τόσο μεγάλος που πλησιάζει την εκτίμηση για το πλήθος των μορίων του σύμπαντος! Ο τρίτος και ο τέταρτος όρος είναι ακόμη πιο μεγάλοι! Κρίνοντας από τους πρώτους όρους της ακολουθίας υποψιαζόμαστε ότι αυτή είναι γνησίως αύξουσα. Ελέγχουμε, πάλι, για ποιούς φυσικούς n ισχύει

$$\frac{n^{30}}{2^n} < \frac{(n+1)^{30}}{2^{n+1}}.$$

Η ανισότητα αυτή ισοδυναμεί με την

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{30}$$

κι αυτή με την

$$\sqrt[30]{2} < 1 + \frac{1}{n}$$

κι αυτή με την

$$n < \frac{1}{\sqrt[30]{2} - 1}.$$

Ο αριθμός $\frac{1}{\sqrt[30]{2}-1}$ είναι ένας πολύ μεγάλος άρρητος (γιατί;) αριθμός και, αν θέσουμε

$$n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt[30]{2} - 1}\right],$$

(οπότε $n_0 < \frac{1}{\sqrt[30]{2}-1} < n_0 + 1$) τότε η ανισότητα

$$\frac{n^{30}}{2^n} < \frac{(n+1)^{30}}{2^{n+1}}$$

ισοδυναμεί με

$$n \leq n_0$$

ενώ η αντίθετη ανισότητα

$$\frac{n^{30}}{2^n} > \frac{(n+1)^{30}}{2^{n+1}}$$

ισοδυναμεί με

$$n \geq n_0 + 1.$$

Άρα ισχύει

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n_0} < x_{n_0+1} > x_{n_0+2} > x_{n_0+3} > \ldots$$

και η ακολουθία είναι τελικά γνησίως φθίνουσα (μετά από τον (n_0+1)-οστό όρο της). Προφανώς, η ακολουθία είναι και φραγμένη. Ένα κάτω φράγμα της είναι ο 0 και ένα άνω φράγμα της είναι ο x_{n_0+1}.