ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΔΕΚΑΤΟ ΕΝΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 19-11-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Σήμερα θα δούμε κάποια πράγματα για μια σημαντική ειδική κατηγορία σειρών, εκείνες που έχουν *όλους τους προσθετέους τους μη-αρνητικούς*. Και θα αρχίσουμε με ένα σημαντικό Θεώρημα, το 8.1 του βιβλίου. Το Θεώρημα αυτό έχει δύσκολη απόδειξη. Αυτό όμως δεν φαίνεται διότι χρησιμοποιούμε ένα άλλο προηγούμενο Θεώρημα, εκείνο για το όριο μονότονης ακολουθίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα το οποίο είναι μη-αρνητικός αριθμός ή $+\infty$. Αν (s_n) είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς, τότε το άθροισμα είναι αριθμός αν και μόνον αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη και το άθροισμα είναι $+\infty$ αν και μόνον αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη.*

Απόδειξη. Για το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς έχουμε τον γνωστό τύπο

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n.$$

Επειδή το άθροισμα s_{n+1} προκύπτει από το s_n με την πρόσθεση του προσθετέου x_{n+1}, ο οποίος είναι ≥ 0, το s_{n+1} είναι $\geq$ του s_n. Με σύμβολα:

$$s_{n+1} = x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = s_n + x_{n+1} \geq s_n.$$

Άρα η ακολουθία (s_n) είναι αύξουσα και, επομένως, έχει οπωσδήποτε όριο, έστω s, το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$. Μάλιστα, το s είναι αριθμός αν και μόνον αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη και είναι $+\infty$ αν και μόνον αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη.
Όμως, το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ είναι εξ ορισμού το όριο της (s_n).
Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η σειρά έχει άθροισμα s και ότι αυτό είναι αριθμός αν και μόνον αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη και ότι αυτό είναι $+\infty$ αν και μόνον αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη.
Μένει να αποδείξουμε ότι το άθροισμα s της σειράς είναι ≥ 0. Επειδή ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \geq 0 + \cdots + 0 = 0$$

για κάθε n. Άρα και το όριο s της (s_n), δηλαδή το άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, είναι ≥ 0. □

Το βασικό συμπέρασμα του Θεωρήματος είναι ότι *κάθε σειρά μη-αρνητικών προσθετέων έχει άθροισμα*. Ας ξαναδιατυπώσουμε, όμως και τα άλλα συμπεράσματα του Θεωρήματος:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \text{αριθμός} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{η } (s_n) \text{ είναι άνω φραγμένη.}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \text{η } (s_n) \text{ δεν είναι άνω φραγμένη.}$$

Και κάτι ακόμη. Αν το άθροισμα της σειράς είναι $+\infty$ τότε δεν είναι αριθμός. Αυτό είναι τελείως προφανές όποια κι αν είναι η σειρά. Όμως, ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν το άθροισμα της σειράς δεν είναι αριθμός, τότε, επειδή μιλάμε για σειρά *μη-αρνητικών προσθετέων*, το άθροισμά της υπάρχει και είναι $+\infty$. Επομένως, για σειρά μη-αρνητικών προσθετέων ισχύει

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{η } \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ συγκλίνει.}$$

Για γενικές σειρές ισχύει, όπως είπαμε, ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty \quad \Leftarrow \quad \text{η} \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ συγκλίνει.}$$

Παράδειγμα. Θεωρούμε την σειρά μη-αρνητικών όρων

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς έχει τύπο

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Δυστυχώς δεν υπάρχει συνοπτικός τύπος γι αυτό το άθροισμα και για να δούμε αν η ακολουθία (s_n) είναι άνω φραγμένη θα κάνουμε ένα κόλπο: γράφουμε

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{kk} \leq \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

για κάθε $k \geq 2$ και τότε:

$$\begin{aligned}
s_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \\
&\leq 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= 1 + 1 \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \underbrace{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} + \cdots \underbrace{-\frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-2}} \underbrace{-\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n} \\
&= 1 + 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + 0 - \frac{1}{n} \\
&= 2 - \frac{1}{n} < 2.
\end{aligned}$$

Άρα η ακολουθία (s_n) είναι άνω φραγμένη, οπότε η σειρά συγκλίνει ή, ισοδύναμα,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Αναφέρω, τελείως πληροφοριακά, ότι το άθροισμα της συγκεκριμένης σειράς είναι ο αριθμός $\frac{\pi^2}{6}$. (Η απόδειξη είναι "άλλη υπόθεση".)

Οι επόμενες δυο Προτάσεις μαζί είναι η Πρόταση 8.7 του βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι ισχύει $0 \leq x_n \leq y_n$ για κάθε n. Τότε $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.*

Αν, επιπλέον, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$.

Απόδειξη. Επειδή οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν μη-αρνητικούς προσθετέους, συνεπάγεται ότι έχουν άθροισμα. Άρα από μια προηγούμενη Πρόταση έχουμε ότι από την υπόθεση ότι ισχύει $0 \leq x_n \leq y_n$ για κάθε n συνεπάγεται

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Τώρα, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty$, οπότε από την τελευταία ανισότητα συνεπάγεται $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. □

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι ισχύει $x_n \geq 0$ και $y_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η ακολουθία $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ είναι φραγμένη (ή, ειδικώτερα, ότι συγκλίνει). Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$.*

Απόδειξη. Αν η ακολουθία $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ είναι φραγμένη, υπάρχει αριθμός M ώστε να ισχύει

$$0 \leq \frac{x_n}{y_n} \leq M$$

για κάθε n και, επομένως,

$$x_n \leq M y_n$$

για κάθε n. Άρα,

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} M y_n = M \sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty$$

επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει. Άρα και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. □

Εφαρμογή: Έστω ότι ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n και

$$\frac{x_n}{y_n} \to \rho.$$

Επειδή ισχύει $\frac{x_n}{y_n} > 0$ για κάθε n, συνεπάγεται

$$0 \leq \rho \leq +\infty.$$

Και τώρα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

$$\text{Αν } 0 \leq \rho < +\infty \text{ τότε : } \quad \sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty.$$

$$\text{Αν } 0 < \rho \leq +\infty \text{ τότε : } \quad \sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty \quad \Leftarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty.$$

$$\text{Αν } 0 < \rho < +\infty \text{ τότε : } \quad \sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty.$$

Το πρώτο συμπέρασμα είναι άμεσο πόρισμα της τελευταίας Πρότασης: το όριο ρ της $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ είναι αριθμός και, επομένως, η ακολουθία αυτή συγκλίνει. Το δεύτερο συμπέρασμα είναι πάλι πόρισμα της ίδιας Πρότασης αλλά με αντιστροφή των ρόλων των δυο σειρών. Πράγματι, παρατηρούμε ότι $\frac{y_n}{x_n} \to \frac{1}{\rho}$ και ότι $0 \leq \frac{1}{\rho} < +\infty$. Τέλος, το τρίτο συμπέρασμα είναι συνδυασμός των δυο πρώτων.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Επειδή

$$\frac{n^2}{n^2+1} \to 1 \neq 0$$

η σειρά δεν συγκλίνει.
Όμως, επειδή η σειρά έχει μη-αρνητικούς προσθετέους, έχει άθροισμα το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$. Το άθροισμα δεν είναι αριθμός (διότι η σειρά δεν συγκλίνει), οπότε το άθροισμα είναι $+\infty$. Δηλαδή,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = +\infty.$$

Παράδειγμα. Τώρα θεωρούμε την σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$

Ο κύριος όρος στον παρονομαστή του n-οστού προσθετέου είναι ο n^2, οπότε ο n-οστός προσθετέος $\frac{n}{n^2+1}$ συμπεριφέρεται περίπου όπως ο $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.
Αυτό μας λέει ότι η δοσμένη σειρά σχετίζεται με την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ και αυτό θα το εξετάσουμε βασισμένοι στην τελευταία Πρόταση. Έχουμε, λοιπόν,

$$\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{n^2+1} \to 1.$$

Επειδή το όριο 1 του λόγου των n-οστών όρων των δυο σειρών έχει την ιδιότητα

$$0 < 1 < +\infty,$$

συνεπάγεται ότι, αν μια από τις δυο σειρές συγκλίνει, τότε και η άλλη σειρά συγκλίνει.
Όμως, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ και άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} = +\infty.$$