ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΑΘΗΜΑ, 19-12-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Άσκηση 4.2.11. *Έστω συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα I (όχι μονοσύνολο). Αν ισχύει $f(r) \geq 0$ για κάθε ρητό $r \in I$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$.*

Πρώτη λύση: Έστω $x \in I$. Τότε υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών (r_n) στο διάστημα I ώστε

$$r_n \to x.$$

Ας αιτιολογήσουμε αυτόν τον ισχυρισμό. Επειδή το I είναι διάστημα θετικού μήκους και $x \in I$, υπάρχει διάστημα της μορφής $[x, c)$ ή της μορφής $(c, x]$ το οποίο περιέχεται ολόκληρο στο I. Στην πρώτη περίπτωση (και αναλόγως στην δεύτερη περίπτωση) γνωρίζουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ρητός r_n τέτοιος ώστε $x \leq r_n < x + \frac{c-x}{n}$. Τότε η ακολουθία ρητών (r_n) είναι ολόκληρη μέσα στο $[x, c)$ και, επομένως, μέσα στο I και ισχύει $r_n \to x$.
Τώρα θεωρούμε μια τέτοια ακολουθία ρητών (r_n) και, επειδή η f είναι συνεχής στο x, έχουμε ότι

$$f(r_n) \to f(x).$$

Όμως, βάσει της υπόθεσης έχουμε ότι ισχύει

$$f(r_n) \geq 0$$

για κάθε n. Άρα

$$f(x) \geq 0.$$

Δεύτερη λύση: Έστω ότι υπάρχει κάποιο $x \in I$ ώστε

$$f(x) < 0.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x, είναι

$$\lim_{t \to x} f(t) = f(x) < 0,$$

οπότε ισχύει

$$f(t) < 0 \qquad \text{κοντά στο } x.$$

Δηλαδή, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$f(t) < 0 \qquad \text{για κάθε } t \in (x - \delta, x + \delta) \cap I.$$

Επειδή $x \in I$ και το I έχει θετικό μήκος, το $(x - \delta, x + \delta) \cap I$ είναι διάστημα θετικού μήκους. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός r στο $(x - \delta, x + \delta) \cap I$, οπότε γι αυτόν τον ρητό ισχύει

$$f(r) < 0.$$

Αυτό είναι άτοπο, διότι για κάθε ρητό r πρέπει να ισχύει $f(r) \geq 0$.
Άρα ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$.

Άσκηση 4.3.4. *Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και έστω ότι για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει κάποιο $x' \in [a, b]$ τέτοιο ώστε*

$$|f(x')| \leq \frac{1}{2}|f(x)|.$$

Αποδείξτε ότι η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[a, b]$.

Πρώτη λύση: Η συνάρτηση $|f|$ είναι κι αυτή συνεχής στο $[a,b]$, οπότε έχει ελάχιστη τιμή στο $[a,b]$. Δηλαδή, υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε να ισχύει

$$|f(\xi)| \leq |f(x)| \qquad \text{για κάθε } x \in [a,b]. \tag{1}$$

Τώρα, σύμφωνα με την υπόθεση, υπάρχει κάποιος $\xi' \in [a,b]$ τέτοιος ώστε

$$|f(\xi')| \leq \frac{1}{2}|f(\xi)|.$$

Για τον ξ' από την (1) συνεπάγεται

$$|f(\xi)| \leq |f(\xi')|.$$

Άρα

$$|f(\xi)| \leq \frac{1}{2}|f(\xi)|$$

και, επομένως, $f(\xi) = 0$.

Δεύτερη λύση: Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε $x_1 \in [a,b]$ (για παράδειγμα $x_1 = a$ ή $x_1 = b$ ή $x_1 = \frac{a+b}{2}$).
Βάσει της υπόθεσης, υπάρχει κάποιος $x_2 \in [a,b]$ ώστε

$$|f(x_2)| \leq \frac{1}{2}|f(x_1)|.$$

Πάλι βάσει της υπόθεσης, υπάρχει κάποιος $x_3 \in [a,b]$ ώστε

$$|f(x_3)| \leq \frac{1}{2}|f(x_2)|.$$

Συνεχίζοντας έτσι επ' άπειρον, σχηματίζεται μια ακολουθία (x_n) στο $[a,b]$ (όπου κάθε όρος της (x_n) προκύπτει από τον προηγούμενο) τέτοια ώστε να ισχύει

$$|f(x_{n+1})| \leq \frac{1}{2}|f(x_n)|$$

για κάθε n.
Τότε, όμως, έχουμε

$$|f(x_n)| \leq \frac{1}{2}|f(x_{n-1})| \leq \frac{1}{2^2}|f(x_{n-2})| \leq \ldots \leq \frac{1}{2^{n-1}}|f(x_1)|,$$

δηλαδή

$$|f(x_n)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}|f(x_1)|$$

για κάθε n.
Άρα

$$f(x_n) \to 0. \tag{2}$$

Η ίδια σκέψη με αυτήν στην απόδειξη του Θεωρήματος Φραγμένης Συνάρτησης: Δεν ξέρουμε αν η ακολουθία (x_n) στο $[a,b]$ συγκλίνει, αλλά ας κάνουμε την υπόθεση ότι η (x_n) συγκλίνει για να δούμε που θα καταλήξουμε.
Έστω ότι $x_n \to \xi$ για κάποιο ξ. Επειδή ισχύει $a \leq x_n \leq b$ για κάθε n, συνεπάγεται $a \leq \xi \leq b$, οπότε $\xi \in [a,b]$. Άρα η f είναι συνεχής στο ξ και, επομένως, $f(x_n) \to f(\xi)$.

Λόγω μοναδικότητας ορίου συνεπάγεται $f(\xi) = 0$ και έχουμε αποδείξει την ύπαρξη ρίζας.
Το πρόβλημα είναι ότι η (x_n) μπορεί να μην συγκλίνει αλλά μας σώζει το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass. Και τώρα συνεχίζουμε κανονικά την λύση.

Από το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \to \xi$$

για κάποιο ξ.
Επειδή ισχύει $a \leq x_{n_k} \leq b$ για κάθε n, συνεπάγεται $a \leq \xi \leq b$, οπότε $\xi \in [a, b]$. Άρα η f είναι συνεχής στο ξ και, επομένως,

$$f(x_{n_k}) \to f(\xi).$$

Από την (2) συνεπάγεται

$$f(x_{n_k}) \to 0$$

και λόγω μοναδικότητας ορίου έχουμε

$$f(\xi) = 0.$$

Άρα αποδείξαμε την ύπαρξη ρίζας της f στο $[a, b]$.

Άσκηση 4.4.7. *Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[a, b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμός $\rho > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x) \geq g(x) + \rho$ για κάθε $x \in [a, b]$.*

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$h = f - g.$$

Η h είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ισχύει

$$h(x) > 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b]. \tag{3}$$

Από το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$h(\xi) \leq h(x) \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Ο αριθμός $\rho = h(\xi)$ είναι, λόγω της (3), θετικός και άρα έχουμε

$$0 < \rho \leq h(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Αυτό είναι το συμπέρασμα το οποίο θέλουμε να αποδείξουμε.

Άσκηση 4.4.9. *Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα I. Αν ισχύει $f(x) \in \mathbb{Q}$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο I.*

Λύση: Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή στο I, οπότε υπάρχουν $a, b \in I$ ώστε $f(a) < f(b)$.
Τότε, όμως, υπάρχει κάποιος άρρητος λ έτσι ώστε $f(a) < \lambda < f(b)$.
Ο λ είναι ανάμεσα σε δυο τιμές της f στο I, οπότε είναι κι αυτός τιμή της f στο I.
Αυτό είναι άτοπο διότι όλες οι τιμές της f είναι ρητοί.
Άρα η f είναι σταθερή στο I.

Άσκηση 4.4.11. *Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα I και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in I$.*
Έστω επιπλέον ότι η συνάρτηση h είναι συνεχής στο I και ότι $h(x) = f(x)$ ή $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $h(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.

Λύση: Για το πρώτο μέρος θεωρούμε την συνάρτηση

$$\phi = f - g.$$

Η ϕ είναι συνεχής στο I και ισχύει

$$\phi(x) \neq 0 \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Άρα η ϕ διατηρεί πρόσημο στο I, οπότε είτε ισχύει $\phi(x) < 0$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $\phi(x) > 0$ για κάθε $x \in I$. Αυτό, όμως, είναι ακριβώς ό,τι θέλουμε να αποδείξουμε.
Για το δεύτερο μέρος θεωρούμε την συνάρτηση

$$\psi = \frac{1}{2}(f + g).$$

Η ψ είναι συνεχής στο I.
Ας δούμε πώς συγκρίνεται η ψ με τις f και g.
Θεωρούμε την περίπτωση που ισχύει

$$f(x) < g(x) \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

(Η άλλη περίπτωση είναι παρόμοια.)
Τότε, προφανώς, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$f(x) < \psi(x) < g(x) \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Τώρα η h ταυτίζεται σε κάθε σημείο του I είτε με την f είτε με την g και, επομένως, ισχύει

$$h(x) \neq \psi(x) \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του πρώτου μέρους στις h και ψ, έχουμε ότι είτε ισχύει $h(x) < \psi(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) > \psi(x)$ για κάθε $x \in I$. Και, πάλι επειδή η h ταυτίζεται σε κάθε σημείο του I είτε με την f είτε με την g, συνεπάγεται ότι, αντιστοίχως, είτε ισχύει $h(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.