ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΤΡΙΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 20-12-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Άσκηση 4.4.12. [α] *Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα I και έστω ότι ισχύει $f(x)^2 = g(x)^2 > 0$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Λύση: Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in I$. Επίσης συνεπάγεται ότι καθεμιά από τις f, g δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του I. Άρα οι f, g διατηρούν πρόσημο στο I, οπότε είτε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$ και ομοίως για την g. Και τώρα είναι προφανές ότι, στην περίπτωση που οι f, g είναι ομόσημες για κάθε $x \in I$, ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$ και, στην περίπτωση που οι f, g είναι ετερόσημες για κάθε $x \in I$, ισχύει $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in I$.

[β] *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και ότι ισχύει $f(x)^2 = x^2$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είτε ισχύει $f(x) = -x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.*

Λύση: Εφαρμόζουμε το μέρος [α] στις συναρτήσεις f και $g(x) = x$ αλλά στο διάστημα $(0, +\infty)$ αντί του $[0, +\infty)$.
Συμπεραίνουμε ότι είτε ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είτε ισχύει $f(x) = -x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
Επειδή $f(0)^2 = 0^2 = 0$, έχουμε ότι $f(0) = 0$ και άρα και οι δυο ισότητες $f(x) = x$ και $f(x) = -x$ ισχύουν και για $x = 0$.
Άρα είτε ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είτε ισχύει $f(x) = -x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

[γ] *Τί συμπεραίνεται αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x)^2 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$;*

Λύση: Το συμπέρασμα του μέρους [β] ισχύει (με την ίδια αιτιολόγηση) και για το διάστημα $(-\infty, 0]$ αντί του $[0, +\infty)$.
Άρα έχουμε ότι είτε ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είτε ισχύει $f(x) = -x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και ομοίως για το $(-\infty, 0]$. Έτσι έχουμε τέσσερις δυνατότητες για την f στο $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$ οι οποίες διατυπώνονται ως εξής: είτε ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είτε ισχύει $f(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είτε ισχύει $f(x) = |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είτε ισχύει $f(x) = -|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Και οι τέσσερις δυνατότητες είναι αποδεκτές διότι και οι τέσσερις συναρτήσεις f είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

Πριν από την επόμενη άσκηση ας θυμηθούμε ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα. Το αντίστροφο δεν ισχύει: υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες είναι ένα-προς-ένα αλλά όχι γνησίως μονότονες. Η άσκηση που ακολουθεί λέει ότι το αντίστροφο ισχύει αν υποθέσουμε επιπλέον ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε διάστημα.

Άσκηση 4.4.19. *Έστω συνάρτηση f συνεχής και ένα-προς-ένα στο διάστημα I. Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο I.*

Λύση: Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο I. Τότε υπάρχουν τρία σημεία a, b, c στο I με $a < b < c$ τέτοια ώστε

$$f(a) < f(b) > f(c) \qquad \text{ή} \qquad f(a) > f(b) < f(c).$$

Θεωρούμε την πρώτη περίπτωση (η άλλη περίπτωση είναι παρόμοια).
Επειδή $f(a) < f(b)$ και $f(c) < f(b)$, συνεπάγεται ότι $\max\{f(a), f(c)\} < f(b)$. Παίρ-

νουμε έναν οποιονδήποτε αριθμό λ ώστε

$$\max\{f(a), f(c)\} < \lambda < f(b).$$

Τότε ο λ είναι ανάμεσα στις τιμές $f(a)$ και $f(b)$ καθώς και ανάμεσα στις τιμές $f(b)$ και $f(c)$.
Επειδή η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[a, b]$ και $[b, c]$, συνεπάγεται ότι υπάρχουν $x_1 \in (a, b)$ και $x_2 \in (b, c)$ τέτοια ώστε

$$f(x_1) = \lambda \qquad \text{και} \qquad f(x_2) = \lambda.$$

Τότε όμως $x_1 < x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα η f είναι γνησίως μονότονη στο I.

Συνεχίζουμε με θεωρία.

Μια χαρακτηριστική ιδιότητα ενός οποιουδήποτε διαστήματος είναι η εξής: αν ένας αριθμός είναι ανάμεσα σε δυο σημεία του διαστήματος, τότε και ο αριθμός αυτός είναι σημείο του διαστήματος. Τώρα θα αποδείξουμε το αντίστροφο, δηλαδή την Πρόταση 1.4 του βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω μη-κενό $A \subseteq \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: αν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ και αν $x_1 < x < x_2$, τότε $x \in A$. Τότε το A είναι διάστημα.*

Απόδειξη. Το A είναι μη-κενό, οπότε έχει supremum και infimum στο $\overline{\mathbb{R}}$ και

$$\inf A \leq \sup A.$$

Τώρα, για κάθε $x \in A$ ισχύει $\inf A \leq x \leq \sup A$, οπότε

$$A \subseteq [\inf A, \sup A].$$

Έστω $x \in (\inf A, \sup A)$.
Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ τέτοια ώστε $x_1 < x < x_2$. Βάσει της υπόθεσης, συνεπάγεται $x \in A$. Επομένως,

$$(\inf A, \sup A) \subseteq A.$$

Άρα έχουμε ακριβώς τέσσερις περιπτώσεις:

$$A = (\inf A, \sup A), \quad A = [\inf A, \sup A], \quad A = (\inf A, \sup A], \quad A = [\inf A, \sup A).$$

Σε κάθε περίπτωση το A είναι διάστημα και, μάλιστα, με άκρα τα $\inf A$ και $\sup A$. □

Τώρα θα εφαρμόσουμε αυτό το αποτέλεσμα σε συνεχείς συναρτήσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα I. Τότε το σύνολο τιμών της f, δηλαδή το*

$$f(I) = \{f(x) \mid x \in I\},$$

είναι κι αυτό διάστημα.

Απόδειξη. Έστω $y_1, y_2 \in f(I)$ με $y_1 < y_2$ και έστω $y_1 < y < y_2$. Τότε το y είναι ανάμεσα στις τιμές y_1 και y_2 της f στο I, οπότε και το y είναι τιμή της f στο I, δηλαδή $y \in f(I)$. Σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση, το $f(I)$ είναι διάστημα. □

Προφανώς, στην προηγούμενη Πρόταση τα άκρα του διαστήματος $f(I)$ είναι το $\inf f(I) = \inf\{f(x) \mid x \in I\}$ και το $\sup f(I) = \sup\{f(x) \mid x \in I\}$. Αν η f έχει ελάχιστη τιμή στο I, τότε αυτή η ελάχιστη τιμή είναι το ελάχιστο στοιχείο του $f(I)$, οπότε το διάστημα $f(I)$ είναι κλειστό από την αριστερή μεριά του. Ομοίως, αν η f έχει μέγιστη τιμή στο I, τότε αυτή η μέγιστη τιμή είναι το μέγιστο στοιχείο του $f(I)$, οπότε το διάστημα $f(I)$ είναι κλειστό από την δεξιά μεριά του.

Θα περιγράψουμε τώρα το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης σε διάστημα σε διάφορες περιπτώσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε $f([a, b]) = [m, M]$, όπου m είναι η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της f στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής συνεπάγεται η ύπαρξη των m, M και επειδή το $f([a, b])$ είναι διάστημα, πρέπει να είναι το $[m, M]$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ. [α] *Έστω $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1}$ ($a_{2n-1} \neq 0$). Τότε το σύνολο τιμών $p(\mathbb{R})$ είναι ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$.*

[β] *Έστω $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n}x^{2n}$ ($a_{2n} \neq 0$). Αν $a_{2n} > 0$, τότε το p έχει ελάχιστη τιμή, έστω m, και $p(\mathbb{R}) = [m, +\infty)$. Αν $a_{2n} < 0$, τότε το p έχει μέγιστη τιμή, έστω M, και $p(\mathbb{R}) = (-\infty, M]$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $a_{2n-1} > 0$, οπότε $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$. Άρα το σύνολο τιμών $p(\mathbb{R})$ δεν είναι κάτω φραγμένο ούτε άνω φραγμένο και, επειδή είναι διάστημα, συνεπάγεται $p(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$.
Αν $a_{2n-1} < 0$, τότε $\lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} p(x) = -\infty$ και η απόδειξη είναι ίδια.

[β] Έστω $a_{2n} > 0$.
Επειδή $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο $b > 0$ ώστε να ισχύει

$$p(x) > p(0) \qquad \text{για κάθε } x > b. \tag{1}$$

Επειδή $\lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty$, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο $a < 0$ ώστε να ισχύει

$$p(x) > p(0) \qquad \text{για κάθε } x < a. \tag{2}$$

Τώρα, η συνάρτηση p είναι συνεχής στο $[a, b]$, οπότε έχει ελάχιστη τιμή, έστω m, στο διάστημα αυτό. Δηλαδή, ισχύει

$$m \leq p(x) \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b]. \tag{3}$$

Επειδή $0 \in [a, b]$, από την (3) συνεπάγεται $m \leq p(0)$, οπότε από τις (1) και (2) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$m < p(x) \qquad \text{για κάθε } x < a \text{ και για κάθε } x > b. \tag{4}$$

Τώρα, από τις (3) και (4) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$m \leq p(x) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα το m (που δεν ξεχνάμε ότι είναι τιμή της συνάρτησης) είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης στο $\mathbb{R}$, δηλαδή το ελάχιστο στοιχείο του $p(\mathbb{R})$.
Τώρα, πάλι επειδή $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = +\infty$, το σύνολο τιμών $p(\mathbb{R})$ δεν είναι άνω φραγμένο.
Και, επειδή το $p(\mathbb{R})$ είναι διάστημα, πρέπει να είναι το $[m, +\infty)$.
Αν $a_{2n} < 0$, η απόδειξη είναι παρόμοια. □