ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΤΡΙΑΚΟΣΤΟ ΕΝΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 21-1-14

Μ. Παπαδημητράκης.

Άσκηση 5.5.10. *Έστω f συνεχής στο $[a,b]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν $f(a)=f(b)=0$ και αν υπάρχει $c\in(a,b)$ ώστε $f(c)>0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f''(\xi)<0$.*

Λύση: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στα διαστήματα $[a,c]$ και $[c,b]$ και βρίσκουμε ότι υπάρχουν $\xi_1\in(a,c)$ και $\xi_2\in(c,b)$ ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)}{c-a}>0,\qquad f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=\frac{-f(c)}{b-c}<0.$$

Τέλος, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$ και βρίσκουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ και, επομένως, $\xi\in(a,b)$ ώστε

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$$

Άσκηση 5.5.12. *Έστω f συνεχής στο $[-1,1]$ και τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$. Αν $f(-1)=f(0)=0$, $f(1)=1$ και $f'(0)=0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ ώστε $f'''(\xi)=3$.*

Λύση: Θα βρούμε πρώτα ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού

$$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

τέτοι ώστε

$$p(-1)=p(0)=0,\ p(1)=1,\ p'(0)=0.$$

Οι τέσσερις αυτές συνθήκες μας δίνουν ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους:

$$-a+b-c+d=0,\ d=0,\ a+b+c+d=1,\ c=0.$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε

$$a=b=\frac{1}{2},\ c=d=0.$$

Άρα το πολυώνυμο που ζητάμε είναι το

$$p(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2.$$

Κατόπιν θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$g(x)=f(x)-p(x).$$

Η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και ισχύει

$$g(-1)=g(0)=g(1)=0,\ g'(0)=0.$$

Τώρα εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$ και βρίσκουμε ότι υπάρχουν $\xi_1\in(-1,0)$ και $\xi_2\in(0,1)$ ώστε

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0.$$

Κατόπιν εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle στα διαστήματα $[\xi_1, 0]$ και $[0, \xi_2]$ και βρίσκουμε ότι υπάρχουν $\eta_1 \in (\xi_1, 0)$ και $\eta_2 \in (0, \xi_2)$ ώστε

$$g''(\eta_1) = g''(\eta_2) = 0.$$

Τέλος, εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα (η_1, η_2) και βρίσκουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\eta_1, \eta_2)$ και, επομένως, $\xi \in (-1, 1)$ ώστε

$$g'''(\xi) = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$f'''(\xi) - p'''(\xi) = 0,$$

οπότε

$$f'''(\xi) = p'''(\xi) = 3.$$

Άσκηση 5.5.11. *Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) και έστω ότι ισχύει $f(x)f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αν η εξίσωση $f(x)f'(x) = 0$ έχει δυο λύσεις στο (a, b), να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή ανάμεσα σ' αυτές τις δυο λύσεις.*

Λύση: Έστω x_1 και x_2 με $x_1 < x_2$ οι δυο λύσεις της $f(x)f'(x) = 0$. Δηλαδή

$$f(x_1)f'(x_1) = f(x_2)f'(x_2) = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$g(x) = f(x)f'(x) \qquad \text{για } x \in (a, b).$$

Έχουμε ότι ισχύει

$$g'(x) = f(x)f''(x) + (f'(x))^2 \geq 0 \qquad \text{για κάθε } x \in (a, b),$$

οπότε η g είναι αύξουσα στο (a, b). Όμως,

$$g(x_1) = g(x_2) = 0,$$

οπότε η g είναι σταθερή

$$g(x) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [x_1, x_2].$$

Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι ισχύει

$$f(x)f'(x) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [x_1, x_2]$$

και αυτό σημαίνει ότι ισχύει

$$\big(f^2(x)\big)' = 2f(x)f'(x) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [x_1, x_2].$$

Άρα η συνάρτηση f^2 είναι σταθερή στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Δηλαδή ισχύει

$$f^2(x) = c \qquad \text{για κάθε } x \in [x_1, x_2]$$

για κάποια σταθερά $c \geq 0$.
Τώρα, εκμεταλλευόμενοι την συνέχεια της f στο $[x_1, x_2]$, θα αποδείξουμε ότι η f είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$.

Πρώτη περίπτωση: Έστω $c = 0$.
Τότε, προφανώς, ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$, οπότε η f είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$.
Δεύτερη περίπτωση: Έστω $c > 0$.
Τώρα συνεπάγεται ότι ισχύει

$$f(x) = +\sqrt{c} \quad \text{ή} \quad f(x) = -\sqrt{c} \qquad \text{για κάθε } x \in [x_1, x_2].$$

Όμως, η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του $[x_1, x_2]$, οπότε διατηρεί πρόσημο στο $[x_1, x_2]$. Άρα είτε ισχύει

$$f(x) = +\sqrt{c} \qquad \text{για κάθε } x \in [x_1, x_2]$$

είτε ισχύει

$$f(x) = -\sqrt{c} \qquad \text{για κάθε } x \in [x_1, x_2].$$

Σε κάθε περίπτωση η f είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$.

Και θα τελειώσουμε αποδεικνύοντας τον Πρώτο Κανόνα του L' Hopitâl.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω f, g παραγωγίσιμες στο διάστημα (ξ, a) και έστω ότι $g(x), g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\xi, a)$ και*

$$\lim_{x \to \xi+} f(x) = \lim_{x \to \xi+} g(x) = 0.$$

Αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to \xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}},$$

τότε υπάρχει και το

$$\lim_{x \to \xi+} \frac{f(x)}{g(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$$

και

$$\lim_{x \to \xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς ορίζουμε

$$f(\xi) = g(\xi) = 0$$

οπότε έτσι οι συναρτήσεις f, g θεωρούνται ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[\xi, a)$. Τώρα, για κάθε $x \in (\xi, a)$ εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy στο διάστημα $[\xi, x]$ και βρίσκουμε ότι υπάρχει $\eta \in (\xi, x)$ ώστε

$$\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} = \frac{f(x) - f(\xi)}{g(x) - g(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{1}$$

Και τώρα θα γράψουμε για συντομία

$$l = \lim_{x \to \xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

και θα υποθέσουμε ότι

$$l \in \mathbb{R}.$$

Θα αποδείξουμε ότι
$$\lim_{x \to \xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$
Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x \to \xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε
$$\xi < x < \xi + \delta \quad \Rightarrow \quad \Big| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \Big| < \epsilon. \tag{2}$$
Τέλος, έστω $\xi < x < \xi + \delta$. Θεωρούμε το αντίστοιχο $\eta \in (\xi, x)$ για το οποίο ισχύει η (1). Παρατηρούμε ότι $\xi < \eta < \xi + \delta$, οπότε από την (2) (με $x = \eta$) συνεπάγεται
$$\Big| \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} - l \Big| < \epsilon.$$
Άρα, από την (1) έχουμε
$$\Big| \frac{f(x)}{g(x)} - l \Big| < \epsilon.$$
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε
$$\xi < x < \xi + \delta \quad \Rightarrow \quad \Big| \frac{f(x)}{g(x)} - l \Big| < \epsilon.$$
Αυτό σημαίνει ότι
$$\lim_{x \to \xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$
□

Μπορείτε να διαβάσετε στο βιβλίο και τις άλλες περιπτώσεις για τον Πρώτο Κανόνα του L' Hopitâl καθώς και τον Δεύτερο Κανόνα του L' Hopitâl, του οποίου η απόδειξη είναι αρκετά πιο δύσκολη.