ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΕΙΚΟΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 21-11-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την σειρά μη-αρνητικών προσθετέων

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 2^n + n}{n^2 + 4^n}$$

και θέλουμε να δούμε αν συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$.
Ο κυρίαρχος όρος στον αριθμητή του n-οστού προσθετέου είναι ο 3^n και στον παρονομαστή ο 4^n. Αυτό, ως γνωστόν, σημαίνει ότι

$$\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0, \qquad \frac{n}{3^n} \to 0, \qquad \frac{n^2}{4^n} \to 0.$$

Άρα ο n-οστός προσθετέος

$$x_n = \frac{3^n + 2^n + n}{n^2 + 4^n}$$

συμπεριφέρεται παρόμοια με τον

$$y_n = \frac{3^n}{4^n}.$$

(Έτσι καταλαβαίνουμε ότι $x_n \to 0$ και συνεχίζουμε τη μελέτη της σειράς.)
Άρα οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ πρέπει να σχετίζονται κι αυτό το διαπιστώνουμε μέσω του ορίου

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{3^n + 2^n + n}{n^2 + 4^n} \cdot \frac{4^n}{3^n} = \frac{1 + \frac{2^n}{3^n} + \frac{n}{3^n}}{\frac{n^2}{4^n} + 1} \to 1.$$

Επειδή

$$0 < 1 < +\infty,$$

είτε και οι δυο σειρές συγκλίνουν είτε και οι δυο σειρές αποκλίνουν στο $+\infty$.
Επειδή

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n < +\infty,$$

συνεπάγεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 2^n + n}{n^2 + 4^n} < +\infty.$$

Παράδειγμα. Κατόπιν παίρνουμε την

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n}.$$

Αυτή η σειρά έχει θετικούς προσθετέους διότι ισχύει $0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$ για κάθε n.
Επίσης, ισχύει $\sin \frac{1}{n} \to 0$. Αυτό το καταλαβαίνουμε διότι η συνάρτηση $\sin x$ είναι συνεχής στο 0 και, επομένως, έχουμε $\sin \frac{1}{n} \to \sin 0 = 0$ αφού $\frac{1}{n} \to 0$. Ένας άλλος τρόπος να το δούμε είναι μέσω της γνωστής ανισότητας $\sin x \leq x$, η οποία ισχύει για κάθε $x \geq 0$. Πράγματι, έχουμε $0 \leq \sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$ και από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται $\sin \frac{1}{n} \to 0$.
Τώρα θυμόμαστε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

από το οποίο παίρνουμε

$$\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1.$$

Επειδή

$$0 < 1 < +\infty,$$

οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ είτε και οι δυο συγκλίνουν είτε και οι δυο αποκλίνουν στο $+\infty$.
Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, συνεπάγεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n} = +\infty.$$

Τώρα θα δούμε ένα πολύ σημαντικό κριτήριο σύγκλισης για σειρές με *φθίνοντες* μη-αρνητικούς όρους.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ. *Έστω ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n και ότι η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα. Έστω και μια συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ ώστε να ισχύει $f(n) = x_n$ για κάθε n.*

Τότε υπάρχει το $\int_1^{+\infty} f(u)\, du = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t f(u)\, du$, η τιμή του είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$ και

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ αν και μόνο αν $\int_1^{+\infty} f(u)\, du < +\infty$,

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$ αν και μόνο αν $\int_1^{+\infty} f(u)\, du = +\infty$.

Επίσης, ισχύει

$$\int_1^{n+1} f(u)\, du \leq x_1 + \cdots + x_n \leq x_1 + \int_1^n f(u)\, du \qquad \text{για κάθε } n$$

και

$$\int_1^{+\infty} f(u)\, du \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq x_1 + \int_1^{+\infty} f(u)\, du.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι ισχύει $f(u) \geq 0$ για κάθε $u \geq 1$.
Έστω $u \geq 1$. Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq u$ και τότε, επειδή η f είναι φθίνουσα, έχουμε

$$f(u) \geq f(n) = x_n \geq 0.$$

Κατόπιν ορίζουμε την συνάρτηση με τύπο

$$F(t) = \int_1^t f(u)\, du \qquad \text{για } t \geq 1.$$

Η F είναι το λεγόμενο αόριστο ολοκλήρωμα της f και θα δούμε ότι είναι αύξουσα συνάρτηση στο $[1, +\infty)$.
Έστω $1 \leq t' \leq t''$. Τότε, επειδή ισχύει $f(u) \geq 0$ για κάθε u στο διάστημα $[t', t'']$, συνεπάγεται $\int_{t'}^{t''} f(u)\, du \geq 0$ και, επομένως,

$$F(t'') = \int_1^{t''} f(u)\, du = \int_1^{t'} f(u)\, du + \int_{t'}^{t''} f(u)\, du \geq \int_1^{t'} f(u)\, du = F(t').$$

Άρα η F είναι αύξουσα συνάρτηση στο $[1, +\infty)$, οπότε υπάρχει το όριο

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\, du = \int_1^{+\infty} f(u)\, du$$

και η τιμή του είναι αριθμός ή $+\infty$.

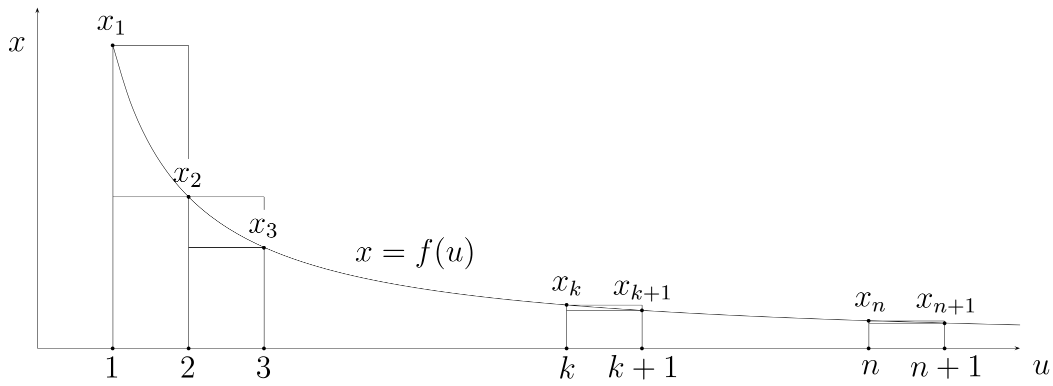
(*Υπενθύμιση από τον Απειροστικό Λογισμό:* Το $\int_1^{+\infty} f(u)\, du$ είναι το *γενικευμένο ολοκλήρωμα* της f στο διάστημα $[1, +\infty)$ και *ορίζεται* να είναι το όριο $\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\, du$ όταν αυτό το όριο υπάρχει. Εμείς μόλις αποδείξαμε ότι στην περίπτωση που εξετάζουμε το όριο αυτό υπάρχει.)

Και πάλι έχουμε ότι ισχύει $F(t) = \int_1^t f(u)\, du \geq 0$ για κάθε $t \geq 1$, οπότε και το όριο $\lim_{t\to+\infty} F(t) = \int_1^{+\infty} f(u)\, du$ είναι ≥ 0. Δηλαδή

$$0 \leq \int_1^{+\infty} f(u)\, du \leq +\infty.$$

Από την άλλη μεριά, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει μη-αρνητικούς όρους, οπότε έχει άθροισμα, το οποίο είναι μη-αρνητικός αριθμός ή $+\infty$. Δηλαδή,

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq +\infty.$$



Για να συσχετίσουμε την σειρά με το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f θα συσχετίσουμε τα μερικά αθροίσματα της σειράς με το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Αυτό γίνεται ως εξής.
Επειδή η f είναι φθίνουσα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$f(k+1) \leq f(u) \leq f(k) \qquad \text{για } \ k \leq u \leq k+1,$$

οπότε

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\, du \leq \int_k^{k+1} f(u)\, du \leq \int_k^{k+1} f(k)\, du = f(k)$$

και, επειδή $f(k) = x_k$ και $f(k+1) = x_{k+1}$, έχουμε

$$x_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(u)\, du \leq x_k.$$

Αυτή η ανισότητα λέει, σε γεωμετρική γλώσσα, ότι το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της συνάρτησης f και πάνω από το διάστημα $[k, k+1]$ του u-άξονα είναι μεγαλύτερο (με την ευρεία έννοια) από το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση το διάστημα $[k, k+1]$ και ύψος $f(k+1) = x_{k+1}$ και μικρότερο (με την ευρεία έννοια) από το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση το διάστημα $[k, k+1]$ και ύψος $f(k) = x_k$. Αυτό είναι φανερό στο σχήμα και οφείλεται στο ότι η συνάρτηση είναι φθίνουσα.
Τώρα προσθέτουμε τις αριστερές ανισότητες για $k = 1, \dots, n-1$ και τις δεξιές ανισότητες για $k = 1, \dots, n$ και βρίσκουμε

$$x_2 + \cdots + x_n \leq \int_1^n f(u)\, du \qquad \text{και} \qquad \int_1^{n+1} f(u)\, du \leq x_1 + \cdots + x_n,$$

αντιστοίχως και, επομένως,

$$\int_1^{n+1} f(u)\, du \leq x_1 + \cdots + x_n \leq x_1 + \int_1^n f(u)\, du.$$

Παίρνοντας τα όρια των τριών παραστάσεων της τελευταίας διπλής ανισότητας (γνωρίζουμε ήδη ότι αυτά τα όρια υπάρχουν), βρίσκουμε

$$\int_1^{+\infty} f(u)\, du \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq x_1 + \int_1^{+\infty} f(u)\, du.$$

Τα (i), (ii) είναι άμεσες συνέπειες της τελευταίας ανισότητας. $\square$

Παράδειγμα. Θα μελετήσουμε την *πολύ σημαντική* σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Το p είναι μια παράμετρος η οποία μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή και καθε τιμή του p ορίζει και μια αντίστοιχη σειρά. Τις ειδικές περιπτώσεις με $p = 1$ και $p = 2$ τις έχουμε ήδη μελετήσει.
Κατ' αρχάς βλέπουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ έχει μη-αρνητικούς όρους, οπότε έχει άθροισμα το οποίο είναι μη-αρνητικός αριθμός ή $+\infty$.
Τώρα έχουμε δυο περιπτώσεις.
Αν $p \leq 0$, τότε ισχύει $\frac{1}{n^p} \geq 1$ για κάθε n, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Αν $p > 0$, τότε η ακολουθία $(\frac{1}{n^p})$ είναι φθίνουσα και έχει θετικούς όρους. Επομένως, θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε το Ολοκληρωτικό Κριτήριο.
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(u) = \frac{1}{u^p} \qquad \text{για } u \geq 1,$$

η οποία είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και, προφανώς, οι τιμές της στους φυσικούς ταυτίζονται με τους αντίστοιχους προσθετέους της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.
Τώρα υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Είναι

$$\int_1^t \frac{1}{u^p}\, du = \frac{t^{1-p} - 1}{1-p} \quad \text{αν } p \neq 1 \qquad \text{και} \qquad \int_1^t \frac{1}{u}\, du = \log t.$$

Επομένως,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^p}\, du = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{u^p}\, du = \begin{cases} \frac{1}{p-1} < +\infty, & \text{αν } p > 1 \\ +\infty, & \text{αν } 0 < p \leq 1 \end{cases}$$

Άρα, συμπεριλαμβάνοντας και την περίπτωση $p \leq 0$, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} < +\infty, & \text{αν } p > 1 \\ = +\infty, & \text{αν } p \leq 1 \end{cases}$$

Ειδικότερα, όπως έχουμε ήδη δει, η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει στο $+\infty$ ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.