

ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΕΒΔΟΜΟ ΜΑΘΗΜΑ, 22-10-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Ακολουθία είναι οποιαδήποτε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και πραγματικές τιμές:

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Παραδοσιακά, τις τιμές της συνάρτησης/ακολουθίας τις γράφουμε x_n αντί $x(n)$. Δηλαδή

$$x_n = x(n) \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Η τιμή x_n ονομάζεται **n -οστός όρος** της συνάρτησης/ακολουθίας. Επίσης, την συνάρτηση/ακολουθία την συμβολίζουμε

$$(x_n) \quad \text{ή} \quad (x_n)_{n=1}^{+\infty}$$

ή πιο απλά

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

Στην τελευταία περίπτωση γράφουμε αρκετούς αρχικούς όρους της ακολουθίας έτσι ώστε να μπορεί κάποιος να “καταλάβει” ποιά ακριβώς είναι η ακολουθία, δηλαδή να καταλάβει ποιός είναι ο n -οστός όρος της. Για παράδειγμα, η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ με n -οστό όρο $x_n = (-1)^{n-1}$ γράφεται

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

Βλέποντας κάποιος ότι οι οκτώ αρχικοί όροι είναι διαδοχικά “συν ένα” και “πλην ένα” καταλαβαίνει ότι η ίδια διαδικασία συνεχίζεται αstadμάτητα: ο ένατος όρος είναι 1, ο δέκατος είναι -1 κλπ. Βέβαια, για να είμαστε απολύτως ακριβείς, κανένας δεν απαγορεύει την ύπαρξη μιας ακολουθίας με αρχικούς όρους

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 0, 0, \dots$$

Γι αυτό μια ακολουθία ορίζεται *αυστηρά* μόνο αν περιγράψουμε τον n -οστό όρο της (μέσω ενός μαθηματικού τύπου, για παράδειγμα). Πάντως, θα είναι αποδεκτή και η απλή παράθεση αρκετών αρχικών όρων μιας ακολουθίας αρκεί από αυτούς να μπορεί να καταλάβει ο επαρκώς υποψιασμένος αναγνώστης τον κανόνα σχηματισμού των υπόλοιπων όρων της ακολουθίας. Πάρτε ως άσκηση (αλλά μην ξοδέψετε πολύ χρόνο) να βρείτε τον τύπο του n -οστού όρου της ακολουθίας

$$1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, \dots,$$

όπου το “τμήμα” $1, 1, -1$ επαναλαμβάνεται συνεχώς.

Δεν πρέπει να συγχέουμε μια ακολουθία με το σύνολο των όρων της. Για παράδειγμα, η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ έχει σύνολο όρων το $\{-1, 1\}$ το οποίο αποτελείται από μόλις δυο στοιχεία ενώ η ακολουθία αποτελείται από άπειρους όρους: ο -1 επαναλαμβάνεται άπειρες φορές και ο 1 επαναλαμβάνεται κι αυτός άπειρες φορές. Ένα άλλο παράδειγμα: οι ακολουθίες

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

και

$$1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, \dots$$

έχουν το ίδιο σύνολο όρων, το $\{-1, 1\}$, αλλά είναι διαφορετικές.

Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **αύξουσα** αν ισχύει $x_n \leq x_{n+1}$ για κάθε n και **φθίνουσα** αν ισχύει $x_n \geq x_{n+1}$ για κάθε n . Η ακολουθία χαρακτηρίζεται **γνησίως αύξουσα** αν ισχύει $x_n < x_{n+1}$ για κάθε n και **γνησίως φθίνουσα** αν ισχύει $x_n > x_{n+1}$ για κάθε n . Η ακολουθία χαρακτηρίζεται **μονότονη** αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα και **γνησίως μονότονη** αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένη** αν υπάρχει αριθμός u ώστε να ισχύει $x_n \leq u$ για κάθε n . Ένας τέτοιος u χαρακτηρίζεται **άνω φράγμα** της ακολουθίας. Η ακολουθία χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένη** αν υπάρχει αριθμός l ώστε να ισχύει $l \leq x_n$ για κάθε n και ένας τέτοιος l χαρακτηρίζεται **κάτω φράγμα** της ακολουθίας. Τέλος, η ακολουθία χαρακτηρίζεται **φραγμένη** αν είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν αριθμοί l, u ώστε να ισχύει

$$l \leq x_n \leq u \quad \text{για κάθε } n.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι μια ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει αριθμός M ώστε να ισχύει

$$|x_n| \leq M \quad \text{για κάθε } n.$$

Πράγματι, η μια κατεύθυνση είναι απλή. Αν υπάρχει αριθμός M ώστε να ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε n , τότε ισχύει

$$-M \leq x_n \leq M \quad \text{για κάθε } n,$$

οπότε ο $-M$ είναι κάτω φράγμα και ο M είναι άνω φράγμα της ακολουθίας και η ακολουθία είναι φραγμένη.

Αντιστρόφως, αν η ακολουθία είναι φραγμένη, τότε υπάρχουν αριθμοί l, u ώστε να ισχύει

$$l \leq x_n \leq u \quad \text{για κάθε } n.$$

Δηλαδή όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι μέσα στο διάστημα $[l, u]$. Τώρα θα βρούμε ένα διάστημα συμμετρικό ως προς τον 0, δηλαδή διάστημα της μορφής $[-M, M]$, το οποίο να είναι μεγαλύτερο (με την ευρεία έννοια) από το $[l, u]$. Αν βρούμε έναν τέτοιο M , τότε όλοι οι όροι της ακολουθίας θα είναι μέσα στο διάστημα $[-M, M]$, δηλαδή θα ισχύει $-M \leq x_n \leq M$ ή, ισοδύναμα,

$$|x_n| \leq M \quad \text{για κάθε } n$$

και θα έχουμε τελειώσει. Πρέπει, λοιπόν, να βρούμε κάποιον M τέτοιο ώστε

$$[l, u] \subseteq [-M, M].$$

Ισοδύναμα:

$$-M \leq l \quad \text{και} \quad u \leq M.$$

Ισοδύναμα:

$$M \geq -l \quad \text{και} \quad M \geq u.$$

Ένας τέτοιος M είναι, για παράδειγμα, ο

$$M = \max\{-l, u\}$$

ή και οποιοσδήποτε μεγαλύτερος M .

Τώρα, θέλω να δώσουμε προσοχή σε δυο εκφράσεις οι οποίες θα παίξουν σημαντικό ρόλο στην περιγραφή πολλών ιδιοτήτων των ακολουθιών.

Η πρώτη έκφραση είναι η “**ισχύει τελικά**” ή (το ίδιο πράγμα) “**ισχύει από κάποιον n και πέρα**”. Εξηγώ: αν κάποια ιδιότητα ισχύει ή δεν ισχύει ανάλογα με τις τιμές που παίρνει ο φυσικός n τότε λέμε ότι η ιδιότητα αυτή **ισχύει τελικά** αν ισχύει για κάθε $n \geq n_0$ για κάποιον κατάλληλο n_0 . Σ’ ατήν την περίπτωση, λέμε επίσης ότι η ιδιότητα **ισχύει από τον n_0 και πέρα**. Για παράδειγμα, η ιδιότητα $\frac{1}{n} < 0.00005$ (όπου ο n είναι φυσικός) είναι ισοδύναμη με την $n > 20000$ και επομένως ισχύει από τον $n_0 = 20001$ και πέρα. Δηλαδή η ιδιότητα $\frac{1}{n} < 0.00005$ ισχύει τελικά.

Η δεύτερη έκφραση είναι η “**ισχύει για άπειρους n** ”. Εδώ δεν χρειάζονται περιττές εξηγήσεις: αν κάποια ιδιότητα ισχύει ή δεν ισχύει ανάλογα με τις τιμές που παίρνει ο φυσικός n τότε είναι σαφές τί εννοούμε λέγοντας ότι η ιδιότητα αυτή **ισχύει για άπειρους n** . Για παράδειγμα, η ιδιότητα $(-1)^{n-1} > 0$ (όπου ο n είναι φυσικός) ισχύει για άπειρους n αφού ισχύει για κάθε περιττό φυσικό n .

Μερικά σχόλια.

Αν μια ιδιότητα ισχύει τελικά, τότε η αντίθετη ιδιότητα ισχύει το πολύ για πεπερασμένους n .

Πράγματι, αν μια ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \geq n_0$ για κάποιον κατάλληλο n_0 , τότε η αντίθετη ιδιότητα μπορεί να ισχύει μόνο για κάποιους από τους $1, 2, \dots, n_0 - 1$ και, επομένως, το πολύ για πεπερασμένους n .

Αν μια ιδιότητα ισχύει τελικά, τότε ισχύει και για άπειρους n .

Πράγματι, αν μια ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \geq n_0$ για κάποιον κατάλληλο n_0 , τότε η ιδιότητα αυτή ισχύει για άπειρους n αφού οι φυσικοί $n \geq n_0$ είναι άπειροι.

Το αντίστροφο του προηγούμενου δεν ισχύει πάντοτε. Υπάρχουν ιδιότητες που ισχύουν για άπειρους n αλλά όχι τελικά.

Παράδειγμα τέτοιας ιδιότητας είναι η $(-1)^{n-1} > 0$. Είδαμε πριν ότι αυτή ισχύει για άπειρους n διότι ισχύει για κάθε περιττό n . Αλλά και η αντίθετη ιδιότητα $(-1)^{n-1} \leq 0$ ισχύει για άπειρους n αφού ισχύει για κάθε άρτιο n . Επομένως, η $(-1)^{n-1} > 0$ δεν ισχύει τελικά.

Αν έχουμε δυο ιδιότητες και ξέρουμε ότι καθεμιά από αυτές ξεχωριστά ισχύει τελικά, τότε συμπεραίνουμε ότι ισχύει τελικά και η σύζευξή τους ή, με άλλα λόγια, ότι ισχύουν και οι δυο ταυτόχρονα τελικά.

Πράγματι, έστω ότι η πρώτη ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \geq n_0'$ για κάποιον κατάλληλο n_0' και έστω ότι η δεύτερη ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \geq n_0''$ για κάποιον κατάλληλο n_0'' . Αν θεωρήσουμε τον $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$, τότε και η πρώτη ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \geq n_0$ (αφού $n_0 \geq n_0'$) και η δεύτερη ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \geq n_0$ (αφού $n_0 \geq n_0''$). Άρα ισχύουν ταυτόχρονα και οι δυο ιδιότητες για κάθε $n \geq n_0$. Άρα ισχύουν ταυτόχρονα και οι δυο ιδιότητες τελικά.

Για παράδειγμα, ισχύει $\frac{1}{n} < 0.05$ για κάθε $n \geq 21$ και ισχύει $2^n \geq 3452$ για κάθε $n \geq 12$. Άρα ισχύει $\frac{1}{n} < 0.05$ και $2^n \geq 3452$ για κάθε $n \geq 21 = \max\{21, 12\}$.

Άσκηση 2.1.2 (Παραλλαγή). Βρείτε το σύνολο όρων των ακολουθιών $(3[\frac{n}{3}])$ και $(n - 3[\frac{n}{3}])$. Είναι οι ακολουθίες αυτές μονότονες;

Λύση: Οι όροι της πρώτης ακολουθίας είναι οι

$0, 0, 3, 3, 3, 6, 6, 6, 9, 9, 9, \dots$

Είναι σαφές ότι το σύνολο όρων της ακολουθίας είναι το σύνολο των μη-αρνητικών πολλαπλασίων του 3 και ότι η ακολουθία είναι αύξουσα (αλλά όχι γνησίως αύξουσα). Οι όροι της δεύτερης ακολουθίας είναι οι

$$1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$$

Τώρα το σύνολο όρων της ακολουθίας είναι το $\{0, 1, 2\}$ και η ακολουθία δεν είναι μονότονη (ούτε τελικά μονότονη). Η ακολουθία θα μπορούσε να περιγραφεί με τον τύπο

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{αν } n = 3k \\ 1, & \text{αν } n = 3k + 1 \\ 2, & \text{αν } n = 3k + 2 \end{cases}$$

= το υπόλοιπο της διαίρεσης $n : 3$.

Άσκηση 2.1.9. Έστω ότι το σύνολο όρων της ακολουθίας (x_n) είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμός c ώστε να ισχύει $x_n = c$ για άπειρους n .

Λύση: Άς υποθέσουμε ότι το σύνολο όρων της (x_n) είναι το

$$\{a_1, a_2, \dots, a_k\}.$$

Αν πράγματι υπάρχει αριθμός c ώστε να ισχύει $x_n = c$ για άπειρους n , τότε, προφανώς, ένας τέτοιος c πρέπει να είναι ένας από τους $a_1, \dots, a_k$. Άρα θα προσπαθήσουμε να φτάσουμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι κανένας από τους $a_1, \dots, a_k$ δεν έχει αυτήν την ιδιότητα. Υποθέτουμε, δηλαδή, ότι αν ο c είναι οποιοσδήποτε από τους $a_1, \dots, a_k$, τότε ισχύει $x_n = c$ για το πολύ πεπερασμένους n . Αυτό σημαίνει ότι

ισχύει $x_n = a_1$ για το πολύ πεπερασμένους n ,

ισχύει $x_n = a_2$ για το πολύ πεπερασμένους n ,

...

...

...

ισχύει $x_n = a_k$ για το πολύ πεπερασμένους n .

Όμως, τότε

ισχύει $x_n = a_1$ ή a_2 ή $\dots$ ή a_k για το πολύ πεπερασμένους n .

(Πράγματι, αν το πλήθος των n για τους οποίους ισχύει $x_n = a_1$ είναι ίσο με A_1 , το πλήθος των n για τους οποίους ισχύει $x_n = a_2$ είναι ίσο με A_2 , κλπ, και το πλήθος των n για τους οποίους ισχύει $x_n = a_k$ είναι ίσο με A_k , τότε το πλήθος των n για τους οποίους ισχύει μια οποιαδήποτε από τις ιδιότητες αυτές είναι ίσο με $A_1 + A_2 + \dots + A_k$ και είναι πεπερασμένο.)

Αυτό όμως είναι προφανώς άτοπο, αφού για κάθε n (και, επομένως, για άπειρους n) ισχύει $x_n = a_1$ ή a_2 ή $\dots$ ή a_k .

Άρα υπάρχει κάποιος από τους αριθμούς $a_1, \dots, a_k$ ώστε, αν c είναι αυτός ο αριθμός, τότε ισχύει $x_n = c$ για άπειρους n .

Σχόλιο: Μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας c με την παραπάνω ιδιότητα. Για

παράδειγμα, η ακολουθία $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ έχει πεπερασμένο σύνολο όρων, το $\{-1, 1\}$, και υπάρχουν δύο c με την παραπάνω ιδιότητα: ο $c = -1$ και ο $c = 1$. Όμως, η ακολουθία $1, -1, 1, 1, 1, 1, \dots$ έχει πεπερασμένο σύνολο όρων, το $\{-1, 1\}$, και υπάρχει μόνο ένας c με την παραπάνω ιδιότητα: ο $c = 1$.

Σχόλιο: Σκεφτείτε το εξής παράδειγμα. Αν αρχίσουμε να ρίχνουμε ένα ζάρι επ' άπειρον και ονομάσουμε $x_1, x_2, \dots$ τα διαδοχικά αποτελέσματα, τότε σχηματίζεται μια ακολουθία με πεπερασμένο σύνολο όρων: ένα υποσύνολο του $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Είναι προφανές ότι ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς $1, 2, 3, 4, 5, 6$ θα επαναληφθεί άπειρες φορές. (Αυτό δεν έχει να κάνει με το αν το ζάρι είναι “πειραγμένο” ή όχι.)