ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΕΙΚΟΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 22-11-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Τώρα θα δούμε μια ακόμη εφαρμογή του Κριτηρίου του Ολοκληρώματος.

Παράδειγμα. Γνωρίζουμε ότι η αρμονική σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

αποκλίνει στο $+\infty$, το οποίο φυσικά σημαίνει ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της αποκλίνει στο $+\infty$. Δηλαδή,

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \to +\infty.$$

Τώρα μας ενδιαφέρει να δούμε "πόσο γρήγορα" τείνει η ακολουθία αυτή στο $+\infty$ και θα χρησιμοποιήσουμε έναν από τους τύπους που εμφανίζονται στην Πρόταση με το Κριτήριο του Ολοκληρώματος.
Θεωρούμε, λοιπόν, την συνάρτηση με τύπο

$$f(u) = \frac{1}{u} \qquad \text{για } u \geq 1,$$

η οποία είναι φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και οι τιμές της στους φυσικούς ταυτίζονται με τους προσθετέους της αρμονικής σειράς.
Ο τύπος που μας ενδιαφέρει είναι ο

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{u}\, du \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{u}\, du \qquad \text{για κάθε } n.$$

Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα, βρίσκουμε για κάθε n ότι

$$\log(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n$$

Διαιρώντας με το $\log n$ βρίσκουμε

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} \leq \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n} \leq \frac{1}{\log n} + 1$$

και, εφαρμόζοντας την ιδιότητα παρεμβολής,

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n} \to 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι *το μερικό άθροισμα* $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ *της αρμονικής σειράς αυξάνεται με τον ίδιο ρυθμό που αυξάνεται ο* $\log n$.
Μπορούμε να δούμε και κάτι ακόμη πιο συγκεκριμένο. Επειδή $\log n \leq \log(n+1)$, από τον τύπο που έχουμε παραπάνω (πριν διαιρέσουμε με το $\log n$) βρίσκουμε

$$\log n \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n$$

οπότε

$$0 \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \leq 1$$

για κάθε n.
Αυτό μας λέει ότι το άθροισμα $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ διαφέρει από τον $\log n$ κατά το πολύ μια μονάδα και, επομένως, αυτές οι δυο ποσότητες είναι ουσιαστικά "ίσες" καθώς το n μεγαλώνει.
Και για να πάρουμε μια πιο απτή ιδέα για τα πραγματικά μεγέθη, ας θεωρήσουμε τον αριθμό $n=2^{300}$. Τότε

$$0 \leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{300}}-\log 2^{300} \leq 1,$$

οπότε

$$0 \leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{300}}-300\log 2 \leq 1.$$

Επειδή $\log 2 = 0.30102999566\ \ldots$, έχουμε ότι

$$0 \leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{300}}-90.3089986992 \leq 1,$$

οπότε

$$90.3089986992 \leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{300}} \leq 91.3089986992.$$

Δηλαδή, η αρμονική σειρά αποκλίνει μεν στο $+\infty$ αλλά με τόσο αργό ρυθμό ώστε να πρέπει να αθροίσουμε πάνω από τους πρώτους 2^{300} (ένα ασύλληπτα μεγάλο πλήθος) προσθετέτους της ώστε να φτάσουμε σε άθροισμα μεγαλύτερο του 92.
Και κάτι τελευταίο. Είδαμε παραπάνω ότι η ακολουθία με n-οστό όρο

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$$

είναι φραγμένη αφού όλοι οι όροι της ανήκουν στο διάστημα $[0,1]$. Εντελώς πληροφοριακά, θα αναφέρω ότι αυτή η ακολουθία συγκλίνει σε κάποιον αριθμό (δείτε την άσκηση 2.4.6 του βιβλίου) ο οποίος συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα γ και ο οποίος ονομάζεται *σταθερά του Euler*:

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n \to \gamma.$$

Αποτελεί ανοικτό πρόβλημα ακόμη στα Μαθηματικά να απαντηθεί το ερώτημα αν ο αριθμός γ είναι ρητός ή άρρητος.

Τώρα θα πούμε κάποια πράγματα για τα λεγόμενα *δεκαδικά αναπτύγματα* αριθμών.

Μια ακολουθία (x_n) ονομάζεται **ακολουθία δεκαδικών ψηφίων** αν όλοι οι όροι της είναι στοιχεία του συνόλου $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ και αν η ακολουθία αυτή δεν είναι τελικά σταθερή 9. Αυτό το τελευταίο σημαίνει ότι ισχύει $x_n \neq 9$ για άπειρους n.

Θεωρούμε τώρα μια οποιαδήποτε ακολουθία δεκαδικών ψηφίων (x_n) και σχηματίζουμε την σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{10^n}=\frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{10^2}+\frac{x_3}{10^3}+\cdots.$$

Μια τέτοια σειρά, η οποία προέρχεται από μια ακολουθία δεκαδικών ψηφίων, ονομάζεται **δεκαδική σειρά** και είναι μια σειρά μη-αρνητικών προσθετέων, οπότε έχει άθροισμα αριθμό ≥ 0 ή $+\infty$. Όμως, επειδή ισχύει $0 \leq x_n \leq 9$ για κάθε n, έχουμε ότι

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{9}{10^n}=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots=\frac{9}{10}\Big(1+\frac{1}{10}+\cdots\Big)=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=1.$$

Αν, μάλιστα, σκεφτούμε ότι ένας τουλάχιστον από τους x_n είναι ≤ 8 και όχι 9, δηλαδή ότι ένας από τους λόγους $\frac{x_n}{10^n}$ είναι $\leq \frac{8}{10^n}$ και όχι $\frac{9}{10^n}$, συμπεραίνουμε ότι η τελευταία ανισότητα είναι γνήσια. Δηλαδή,

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots = \frac{9}{10}\Big(1 + \frac{1}{10} + \cdots\Big) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

Άρα το άθροισμα κάθε δεκαδικής σειράς είναι αριθμός στο διάστημα $[0,1)$.

Τώρα θα δούμε και το αντίστροφο. Δηλαδή ότι για κάθε αριθμό στο $[0,1)$ υπάρχει μια δεκαδική σειρά το άθροισμα της οποίας είναι αυτός ο αριθμός.

Θεωρούμε έναν x στο $[0,1)$ και χωρίζουμε το διάστημα αυτό στα 10 διαδοχικά διαστήματα

$$\Big[0, \frac{1}{10}\Big), \Big[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\Big), \ldots, \Big[\frac{9}{10}, 1\Big)$$

καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{10}$. Προφανώς, ο x ανήκει σε ακριβώς ένα από αυτά τα διαστήματα, αφού τα διαστήματα αυτά είναι ανά δύο ξένα και η ένωσή τους είναι το $[0,1)$. Δηλαδή έχουμε ότι

$$\frac{x_1}{10} \leq x < \frac{x_1}{10} + \frac{1}{10} \qquad \text{για κάποιον } \ x_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Τώρα, χωρίζουμε το διάστημα $[\frac{x_1}{10}, \frac{x_1}{10} + \frac{1}{10})$ που προέκυψε, το οποίο έχει μήκος $\frac{1}{10}$, στα 10 διαδοχικά διαστήματα

$$\Big[\frac{x_1}{10}, \frac{x_1}{10} + \frac{1}{10^2}\Big), \Big[\frac{x_1}{10} + \frac{1}{10^2}, \frac{x_1}{10} + \frac{2}{10^2}\Big), \ldots, \Big[\frac{x_1}{10} + \frac{9}{10^2}, \frac{x_1}{10} + \frac{1}{10}\Big)$$

καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{10^2}$. Ο x ανήκει σε ακριβώς ένα από αυτά τα διαστήματα και, όπως πριν, έχουμε ότι

$$\frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} \leq x < \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{1}{10^2} \qquad \text{για κάποιους } \ x_1, x_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Είναι φανερό ότι αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί επαγωγικά επ' άπειρον, βρίσκοντας σε κάθε βήμα ένα διάστημα μέσα στο διάστημα που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα και με υποδεκαπλάσιο μήκος, το οποίο να περιέχει τον αρχικό αριθμό x. Έτσι θα δημιουργηθεί μια ακολουθία δεκαδικών ψηφίων (x_n) για την οποία θα ισχύει

$$\frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} \leq x < \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Άρα ορίζονται τρεις ακολουθίες: η (x_n), η (s_n) και η (t_n). Οι δυο τελευταίες έχουν τύπους

$$s_n = \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_n}{10^n}, \qquad t_n = \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

και ισχύει

$$s_n \leq x < t_n$$

για κάθε n. Επίσης, από τον τρόπο κατασκευής των ακολουθιών αυτών έχουμε ότι κάθε διάστημα $[s_n, t_n)$ περιέχει το επόμενο διάστημα $[s_{n+1}, t_{n+1})$, οπότε αυτά τα διαστήματα είναι εγκιβωτισμένα. Παρατηρούμε ότι

$$t_n - s_n = \frac{1}{10^n} \to 0,$$

οπότε οι (s_n), (t_n) συγκλίνουν στον x. Πράγματι, ισχύει

$$0 \leq x - s_n < t_n - s_n$$

για κάθε n και από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται

$$s_n \to x.$$

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι και $t_n \to x$.

Τώρα, όμως, συνειδητοποιούμε ότι το $s_n = \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_n}{10^n}$ δεν είναι παρά το n-οστό μερικό άθροισμα της δεκαδικής σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$. Επομένως, το ότι $s_n \to x$ σημαίνει ότι το άθροισμα της σειράς αυτής είναι ο x. Δηλαδή

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n} = x.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε αριθμό στο $[0, 1)$ υπάρχει μια δεκαδική σειρά το άθροισμα της οποίας είναι αυτός ο αριθμός.

Αν είναι κάποιος προσεκτικός, θα παρατηρήσει ότι στην απόδειξη που κάναμε αφήσαμε ένα σκοτεινό σημείο. Είναι φανερό ότι οι αριθμοί x_n που προέκυψαν από την επαγωγική διαδικασία της απόδειξης ανήκουν όλοι στο σύνολο $\{0, 1, \ldots, 9\}$, αλλά για να τους χαρακτηρίσουμε *ακολουθία δεκαδικών ψηφίων* πρέπει να αποδείξουμε επιπλέον ότι δεν είναι τελικά ίσοι με 9. Αυτό το παραλείψαμε, αλλά αν θέλει κάποιος μπορεί να το διαβάσει στις ενότητες 2.4 και 8.2 του βιβλίου (όπου όλη η διαδικασία γίνεται κάπως πιο γενικά, θεωρώντας αντί του αριθμού 10 έναν φυσικό $p > 2$ και αντί των δεκαδικών ψηφίων $0, 1, \ldots, 9$ τα p-αδικά ψηφία $0, 1, \ldots, p-1$).

Είναι προφανές ότι μια δεκαδική σειρά έχει ως άθροισμα έναν *μοναδικό* αριθμό. Μπορούμε, όμως, να αποδείξουμε ότι ισχύει και το ανάποδο: για κάθε αριθμό στο $[0, 1)$ υπάρχει *μοναδική* δεκαδική σειρά το άθροισμα της οποίας είναι αυτός ο αριθμός. Την απόδειξη της μοναδικότητας της δεκαδικής σειράς μπορεί όποιος θέλει να την διαβάσει στο βιβλίο (και να δει ότι στην απόδειξη της μοναδικότητας παίζει ουσιαστικό ρόλο το ότι τα δεκαδικά ψηφία δεν είναι τελικά 9).

Η δεκαδική σειρά η οποία αντιστοιχεί σε έναν αριθμό x στο $[0, 1)$ ώστε να ισχύει

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$$

ονομάζεται **δεκαδικό ανάπτυγμα** του x και χρησιμοποιούμε παραδοσιακά το γνωστό από το δημοτικό σύμβολο $0.x_1x_2x_3\ldots$ για την δεκαδική σειρά. Οπότε η τελευταία σχέση ανάμεσα στον αριθμό x και στο δεκαδικό του ανάπτυγμα γράφεται και

$$x = 0.x_1x_2x_3\ldots.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι *υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στους αριθμούς στο* $[0, 1)$ *και στις ακολουθίες δεκαδικών ψηφίων ή, ισοδύναμα, ανάμεσα στους αριθμούς στο* $[0, 1)$ *και στα δεκαδικά αναπτύγματα* $0.x_1x_2x_3\ldots$.

Άσκηση 8.2.2. *Μελετήστε ως προς την σύγκλιση την σειρά*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right).$$

Λύση: Για να δούμε αν ο n-οστός όρος τείνει στο 0, γράφουμε

$$\sqrt{n^2+1}-n=\frac{(n^2+1)-n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\to 0.$$

Από τον ίδιο τύπο βλέπουμε ότι ο n-οστός όρος συμπεριφέρεται όπως ο $\frac{1}{\sqrt{n^2}+n}=\frac{1}{2n}$. Επομένως, θα συσχετίσουμε την αρχική σειρά με την $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ και χρησιμοποιούμε τον λόγο των n-οστών όρων τους.

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}\to\frac{1}{2}.$$

Επειδή

$$0<\frac{1}{2}<+\infty,$$

οι σειρές είτε και οι δύο συγκλίνουν είτε και οι δύο αποκλίνουν στο $+\infty$.
Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, συνεπάγεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sqrt{n^2+1}-n\big)=+\infty.$$

Άσκηση 8.2.3. *Βρείτε τις τιμές της παραμέτρου a για τις οποίες η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n^a\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big)$$

συγκλίνει.

Λύση: Αν συμβολίσουμε x_n τον n-οστό όρο της σειράς, βλέπουμε ότι

$$x_n=n^a\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big)=n^a\,\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\frac{n^a}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}.$$

Άρα ο x_n είναι περίπου ίσος με τον

$$y_n=\frac{n^a}{\sqrt{n}\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n})}=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}-a}}.$$

Για τον λόγο των x_n και y_n έχουμε ότι

$$\frac{x_n}{y_n}=\frac{n^a}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\,2n^{\frac{3}{2}-a}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\big(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\big)}\to 1.$$

Επειδή

$$0<1<+\infty,$$

η αρχική σειρά και η $\sum_{n=1}^{+\infty}y_n$ συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο σε σχέση με την σύγκλιση. Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}y_n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-a}}\begin{cases}<+\infty, & \text{αν } \frac{3}{2}-a>1\\ =+\infty, & \text{αν } \frac{3}{2}-a\le 1\end{cases}$$

Άρα η δοσμένη σειρά συγκλίνει αν $a<\frac{1}{2}$ και αποκλίνει στο $+\infty$ αν $a\ge\frac{1}{2}$.