ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΟΓΔΟΟ ΜΑΘΗΜΑ, 24-10-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Τώρα θα δούμε τον ορισμό του ορίου ακολουθίας. Θα αρχίσουμε με την πιο απλοϊκή (κατά τη γνώμη μου) διατύπωση και θα περνάμε σε διαδοχικά πιο "μαθηματικοποιημένες" διατυπώσεις.

Λέμε ότι η ακολουθία (x_n) **έχει όριο** τον αριθμό x ή ότι **συγκλίνει** στον αριθμό x ή ότι ο αριθμός x **είναι όριο** της (x_n) και γράφουμε

$$x_n \to x \qquad \text{ή} \qquad \lim x_n = x \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

όταν συμβαίνει το εξής:

αν ο n γίνει αρκετά μεγάλος, η απόσταση του x_n από τον x θα γίνει όσο θέλουμε μικρή

ή, ισοδύναμα,

η $|x_n - x|$ θα γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό (οσοδήποτε μικρό), αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό

ή, ισοδύναμα,

για κάθε $\epsilon > 0$ (οσοδήποτε μικρό) θα υπάρχει κάποιος κατάλληλος n_0 έτσι ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$

ή, ισοδύναμα,

για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$

ή, ισοδύναμα,

για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$.

Το "ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$" μπορούμε να το διατυπώσουμε "από το $n \geq n_0$ συνεπάγεται το $|x_n - x| < \epsilon$" ή, ισοδύναμα, "το $|x_n - x| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $n \geq n_0$". Άρα ο παραπάνω ορισμός του ορίου διατυπώνεται και ως εξής:

για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |x_n - x| < \epsilon$$

ή, ισοδύναμα,

για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε

$$|x_n - x| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Αυτές οι διατυπώσεις και ειδικώτερα η τελευταία μας λένε τί πρέπει να κάνουμε για να αποδείξουμε ότι μια συγκεκριμένη ακολουθία (x_n) έχει όριο έναν συγκεκριμένο αριθμό x. *Πρέπει να θεωρήσουμε έναν γενικό αριθμό $\epsilon > 0$ (όχι συγκεκριμένο αριθμό: το σύμβολο ϵ) και να αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιος κατάλληλος φυσικός n_0 (ο οποίος θα εξαρτάται από τον ϵ από τον οποίο ξεκινάμε) έτσι ώστε*

$$|x_n - x| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Προσέξτε: *ο $\epsilon > 0$ θεωρείται δοσμένος και πρέπει να βρούμε κάποιον n_0 (ή να αποδείξουμε την ύπαρξη κάποιου n_0).*

Η τακτική που ακολουθούμε είναι η εξής. Γράφουμε διαδοχικές σχέσεις, ξεκινώντας με την $|x_n - x| < \epsilon$ και περνώντας από κάθε σχέση στην επόμενη σχέση με αντίστροφη συνεπαγωγή μέχρι να καταλήξουμε στην $n \geq n_0$. Δηλαδή:

$$|x_n - x| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad \ldots \quad \Leftarrow \quad \ldots \quad \Leftarrow \quad \ldots \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Παράδειγμα: Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{1}{n} \to 0.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{n} < \epsilon \quad \Leftarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon} \quad \Leftarrow \quad n \geq \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1,$$

οπότε, παίρνοντας $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$, έχουμε ότι

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Γενικά, όταν φτάνουμε σε μια σχέση της μορφής $n > a$ (όπως πριν που φτάσαμε στην $n > \frac{1}{\epsilon}$) σκεφτόμαστε ότι για να είναι ο φυσικός n μεγαλύτερος από τον αριθμό a αρκεί να είναι μεγαλύτερος (με την ευρεία έννοια) από τον ελάχιστο φυσικό ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον a και ότι ο ελάχιστος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον a είναι ο $[a] + 1$, αν $a \geq 0$, και ο 1, αν $a < 0$.

Παράδειγμα: Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n} - 0\right| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{n} < \epsilon \quad \Leftarrow \quad \ldots$$

και συνεχίζουμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα: Θα αποδείξουμε ότι

$$c \to c,$$

δηλαδή ότι η σταθερή ακολουθία $c, c, c, \ldots$ με τύπο $x_n = c$ για κάθε n συγκλίνει στον αριθμό c.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε

$$|c - c| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad 0 < \epsilon \quad \Leftarrow \quad n \geq 1.$$

Ψύχραιμα: στο παράδειγμα αυτό η γενική σχέση $|x_n - x| < \epsilon$ γράφεται $|c - c| < \epsilon$ ή, ισοδύναμα, $0 < \epsilon$ και προφανώς ισχύει για κάθε n. Γι αυτό λέμε ότι: το $n \geq 1$ συνεπάγεται το $|c - c| < \epsilon$.
Εδώ, λοιπόν, ο κατάλληλος n_0 είναι ο $n_0 = 1$ (και παρατηρούμε ότι είναι ανεξάρτητος του ϵ).

Παράδειγμα: Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{n+2}{n^2+1} \to 0.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε

$$\left|\frac{n+2}{n^2+1} - 0\right| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{n+2}{n^2+1} < \epsilon \quad \Leftarrow \quad \epsilon n^2 - n + \epsilon - 2 > 0.$$

Παύση. Προσπαθώντας να λύσουμε την τελευταία ανισότητα ως προς n και να την φέρουμε στη μορφή $n > a$, συνειδητοποιούμε ότι αυτή είναι κάπως άβολο να λυθεί αφού θα προκύψουν σχετικά περίπλοκοι τύποι από τις ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\epsilon n^2 - n + \epsilon - 2 = 0$. Και, επειδή θα μπορούσε να είχε προκύψει ακόμη πιο άβολη ανισότητα με δυνάμεις του n με εκθέτη μεγαλύτερο του 2 ή και ακόμη πιο περίπλοκη ανισότητα χωρίς ελπίδα επίλυσης, θα ήταν καλό να μάθουμε μια διαφορετική μέθοδο εύρεσης του κατάλληλου n_0.
Θεωρούμε την παράσταση $\frac{n+2}{n^2+1}$ του n η οποία θέλουμε να είναι $< \epsilon$ και *ψάχνουμε να βρούμε μια άλλη παράσταση A του n η οποία να είναι μεγαλύτερη (με την ευρεία έννοια) από την $\frac{n+2}{n^2+1}$ αλλά και απλούστερη από την $\frac{n+2}{n^2+1}$.* Την θέλουμε μεγαλύτερη (με την ευρεία έννοια) από την $\frac{n+2}{n^2+1}$ διότι τότε θα έχουμε ότι

$$\frac{n+2}{n^2+1} < \epsilon \quad \Leftarrow \quad A < \epsilon$$

και την θέλουμε απλούστερη από την $\frac{n+2}{n^2+1}$ διότι τότε η ανισότητα $A < \epsilon$ θα μπορεί να λύθεί πιο εύκολα από την $\frac{n+2}{n^2+1} < \epsilon$.
Πώς βρίσκουμε μια τέτοια παράσταση A; Να ένας τρόπος (υπάρχουν πολλοί):

$$\frac{n+2}{n^2+1} \leq \frac{n+2n}{n^2} = \frac{3}{n}.$$

Άρα, με την παράσταση $A = \frac{3}{n}$, έχουμε από την αρχή:

$$\left|\frac{n+2}{n^2+1} - 0\right| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{n+2}{n^2+1} < \epsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{3}{n} < \epsilon \quad \Leftarrow \quad n > \frac{3}{\epsilon} \quad \Leftarrow \quad n \geq \left[\frac{3}{\epsilon}\right] + 1.$$

Επομένως, με $n_0 = [\frac{3}{\epsilon}] + 1$ έχουμε ότι

$$\left|\frac{n+2}{n^2+1} - 0\right| < \epsilon \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Συνεχίζουμε με τον γενικό ορισμό του ορίου ακολουθίας και πάμε στην περίπτωση που το όριο δεν είναι αριθμός. Θα αρχίσουμε πάλι με την πιο απλοϊκή διατύπωση και θα περνάμε σε διαδοχικά πιο "μαθηματικοποιημένες" διατυπώσεις.

Λέμε ότι η ακολουθία (x_n) **έχει όριο** το $+\infty$ ή ότι **αποκλίνει** στο $+\infty$ ή ότι το $+\infty$ **είναι όριο** της (x_n) και γράφουμε

$$x_n \to +\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim x_n = +\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$$

όταν συμβαίνει το εξής:

αν ο n γίνει αρκετά μεγάλος, ο x_n θα γίνει όσο θέλουμε μεγάλος

ή, ισοδύναμα,

ο x_n θα γίνει μεγαλύτερος από οποιονδήποτε θετικό αριθμό (οσοδήποτε μεγάλο), αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό

ή, ισοδύναμα,

για κάθε $M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο) θα υπάρχει κάποιος κατάλληλος n_0 έτσι ώστε να ισχύει $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$

ή, ισοδύναμα,

για κάθε $M > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$

ή, ισοδύναμα,

για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$.

Το "ισχύει $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$" μπορούμε να το διατυπώσουμε "από το $n \geq n_0$ συνεπάγεται το $x_n > M$" ή, ισοδύναμα, "το $x_n > M$ συνεπάγεται από το $n \geq n_0$". Άρα ο παραπάνω ορισμός του ορίου διατυπώνεται και ως εξής:

για κάθε $M > 0$ υπάρχει n_0 ώστε

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad x_n > M$$

ή, ισοδύναμα,

για κάθε $M > 0$ υπάρχει n_0 ώστε

$$x_n > M \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Όταν, λοιπόν, θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια συγκεκριμένη ακολουθία (x_n) έχει όριο το $+\infty$, *πρέπει να θεωρήσουμε έναν γενικό αριθμό $M > 0$ (όχι συγκεκριμένο αριθμό: το σύμβολο M) και να αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιος κατάλληλος φυσικός n_0 (ο οποίος θα εξαρτάται από τον M από τον οποίο ξεκινάμε) έτσι ώστε*

$$x_n > M \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Προσέξτε πάλι: *ο $M > 0$ θεωρείται δοσμένος και πρέπει να βρούμε κάποιον n_0 (ή να αποδείξουμε την ύπαρξη κάποιου n_0).*

Η τακτική που ακολουθούμε είναι και πάλι η εξής. Γράφουμε διαδοχικές σχέσεις, ξεκινώντας με την $x_n > M$ και περνώντας από κάθε σχέση στην επόμενη σχέση με αντίστροφη συνεπαγωγή μέχρι να καταλήξουμε στην $n \geq n_0$. Δηλαδή:

$$x_n > M \quad \Leftarrow \quad \ldots \quad \Leftarrow \quad \ldots \quad \Leftarrow \quad \ldots \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Εντελώς ανάλογη είναι η περίπτωση που το $-\infty$ είναι το όριο της ακολουθίας (x_n). Όλα όσα είπαμε ισχύουν κατάλληλα προσαρμοσμένα αντικαθιστώντας την σχέση $x_n > M$ με την $x_n < -M$. Βρείτε εσείς τις ανάλογες διατυπώσεις.

Παράδειγμα: Θα αποδείξουμε ότι

$$n^2 \to +\infty.$$

Έστω $M > 0$. Τότε

$$n^2 > M \quad \Leftarrow \quad n > \sqrt{M} \quad \Leftarrow \quad n \geq \left[\sqrt{M}\right] + 1,$$

οπότε, παίρνοντας $n_0 = [\sqrt{M}] + 1$, έχουμε ότι

$$n^2 > M \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$

Παράδειγμα: Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{n^5 + 4n}{n^3 + 1} \to +\infty.$$

Έστω $M > 0$. Τότε

$$\frac{n^5+4n}{n^3+1} > M \quad \Leftarrow \quad n^5 - Mn^3 + 4n - M > 0.$$

Η τελευταία ανισότητα δεν λύνεται, οπότε εφαρμόζουμε μια τεχνική που γνωρίσαμε σε προηγούμενο παράδειγμα. Θεωρούμε την παράσταση $\frac{n^5+4n}{n^3+1}$ του n η οποία θέλουμε να είναι $> M$ και *ψάχνουμε να βρούμε μια άλλη παράσταση A του n η οποία να είναι μικρότερη (με την ευρεία έννοια) από την $\frac{n^5+4n}{n^3+1}$ αλλά και απλούστερη από την $\frac{n^5+4n}{n^3+1}$.*
Την θέλουμε μικρότερη (με την ευρεία έννοια) από την $\frac{n^5+4n}{n^3+1}$ διότι τότε θα έχουμε ότι

$$\frac{n^5+4n}{n^3+1} > M \quad \Leftarrow \quad A > M$$

και την θέλουμε απλούστερη από την $\frac{n^5+4n}{n^3+1}$ διότι τότε η ανισότητα $A > M$ θα μπορεί να λύθεί πιο εύκολα από την $\frac{n^5+4n}{n^3+1} > M$.
Να ένας τρόπος να βρούμε μια τέτοια παράσταση A:

$$\frac{n^5+4n}{n^3+1} \geq \frac{n^5}{n^3+n^3} = \frac{n^2}{2}.$$

Άρα, με την παράσταση $A = \frac{n^2}{2}$, έχουμε από την αρχή:

$$\frac{n^5+4n}{n^3+1} > M \quad \Leftarrow \quad \frac{n^2}{2} > M \quad \Leftarrow \quad n > \sqrt{2M} \quad \Leftarrow \quad n \geq \left[\sqrt{2M}\right] + 1.$$

Επομένως, με $n_0 = [\sqrt{2M}] + 1$ έχουμε ότι

$$\frac{n^5+4n}{n^3+1} > M \quad \Leftarrow \quad n \geq n_0.$$