ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΕΝΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 25-10-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Τώρα θα μιλήσουμε για την έννοια της *περιοχής*, η οποία έχει κεντρικό ρόλο στη μελέτη της έννοιας του ορίου (ακολουθίας και συνάρτησης).

Αν $\epsilon > 0$, ονομάζουμε ϵ-**περιοχή** του αριθμού x το διάστημα $(x-\epsilon, x+\epsilon)$, το οποίο είναι συμμετρικό γύρω από τον x, και συμβολίζουμε

$$N_x(\epsilon) = (x-\epsilon, x+\epsilon).$$

Λέμε ότι η $N_x(\epsilon)$ έχει **κέντρο** x και **ακτίνα** ϵ.
Επίσης, ονομάζουμε ϵ-**περιοχή** του $+\infty$ το διάστημα $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ και συμβολίζουμε

$$N_{+\infty}(\epsilon) = \Big(\frac{1}{\epsilon}, +\infty\Big].$$

Τέλος, ονομάζουμε ϵ-**περιοχή** του $-\infty$ το διάστημα $[-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$ και συμβολίζουμε

$$N_{-\infty}(\epsilon) = \Big[-\infty, -\frac{1}{\epsilon}\Big).$$

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι, όποιο κι αν είναι το $x \in \overline{\mathbb{R}}$ (δηλαδή, είτε το x είναι αριθμός είτε είναι $+\infty$ είτε είναι $-\infty$), κάθε περιοχή του το περιέχει. Οι παρακάτω ασκήσεις περιγράφουν μερικές βασικές ιδιότητες των περιοχών.

Άσκηση 2.2.2. [α] *Αποδείξτε ότι όταν ο $\epsilon > 0$ μικραίνει και το $x \in \overline{\mathbb{R}}$ μένει αμετάβλητο, τότε η περιοχή $N_x(\epsilon)$ μικραίνει.*

[β] *Αν $l < x$, δηλαδή το x (αριθμός ή $+\infty$) είναι δεξιά του l, τότε υπάρχει ένας αρκετά μικρός $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι δεξιά του l.*
Αν $x < u$, δηλαδή το x (αριθμός ή $-\infty$) είναι αριστερά του u, τότε υπάρχει ένας αρκετά μικρός $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι αριστερά του u.
Αν $l < x < u$, δηλαδή ο x (αριθμός) είναι ανάμεσα στους l, u, τότε υπάρχει ένας αρκετά μικρός $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι ανάμεσα στους l, u.

Λύση: [α] Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$. Τότε

$$x - \epsilon_2 < x - \epsilon_1 < x + \epsilon_1 < x + \epsilon_2,$$

δηλαδή

$$(x - \epsilon_1, x + \epsilon_1) \subseteq (x - \epsilon_2, x + \epsilon_2).$$

Έστω $x = +\infty$ και $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$. Τότε

$$0 < \frac{1}{\epsilon_2} < \frac{1}{\epsilon_1},$$

οπότε

$$\Big(\frac{1}{\epsilon_1}, +\infty\Big] \subseteq \Big(\frac{1}{\epsilon_2}, +\infty\Big].$$

Η περίπτωση με το $x = -\infty$ είναι παρόμοια.

[β] Έστω $l < x$ και $x \in \mathbb{R}$. Για να είναι ολόκληρη η περιοχή $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ δεξιά του l, αρκεί να είναι το αριστερό άκρο $x - \epsilon$ δεξιά (με την ευρεία έννοια) του l, δηλαδή να είναι

$$l \leq x - \epsilon$$

ή, ισοδύναμα,

$$\epsilon \leq x - l.$$

Άρα με $\epsilon = x - l$ (ή και οποιονδήποτε μικρότερο $\epsilon > 0$), η περιοχή $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ είναι δεξιά του l.
Τώρα, έστω $x = +\infty$ (οπότε $l < x$). Και πάλι, για να είναι ολόκληρη η περιοχή $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ δεξιά του l, αρκεί να είναι το αριστερό άκρο $\frac{1}{\epsilon}$ δεξιά (με την ευρεία έννοια) του l, δηλαδή να είναι

$$l \leq \frac{1}{\epsilon}.$$

Τώρα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
Αν $l \leq 0$, τότε, όποιον ϵ κι αν πάρουμε (για παράδειγμα $\epsilon = 1$), η τελευταία ανισότητα ισχύει και, επομένως, η περιοχή $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ είναι δεξιά του l. (Αυτό είναι εξ αρχής προφανές.)
Αν $l > 0$, τότε η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\epsilon \leq \frac{1}{l},$$

οπότε, αν πάρουμε $\epsilon = \frac{1}{l}$ (ή και οποιονδήποτε μικρότερο $\epsilon > 0$), η περιοχή $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ είναι δεξιά του l.
Η περίπτωση $x < u$ είναι παρόμοια με την περίπτωση $l < x$.
Τέλος, έστω $l < x < u$. Για να είναι ολόκληρη η περιοχή $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ ανάμεσα στους l, u, αρκεί να είναι το αριστερό άκρο $x - \epsilon$ δεξιά (με την ευρεία έννοια) του l και το δεξιό άκρο $x + \epsilon$ αριστερά (με την ευρεία έννοια) του u, δηλαδή να είναι

$$l \leq x - \epsilon \qquad \text{και} \qquad x + \epsilon \leq u$$

ή, ισοδύναμα,

$$\epsilon \leq x - l \qquad \text{και} \qquad \epsilon \leq u - x.$$

Άρα με

$$\epsilon = \min\{x - l, u - x\}$$

(ή και οποιονδήποτε μικρότερο $\epsilon > 0$), η περιοχή $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ είναι ανάμεσα στους l, u.

Σχόλιο στο [β]*:* Όταν ο x είναι αριθμός και $l < x$, τότε ο $x - l$ είναι η απόσταση του x από τον l και, επομένως, έχουμε ότι, αν ο $\epsilon > 0$ δεν υπερβαίνει την απόσταση του x από τον l, τότε η περιοχή $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ είναι ολόκληρη δεξιά του l.
Το ίδιο ισχύει και αν ο x είναι αριθμός και $x < u$. Ο $u - x$ είναι η απόσταση του x από τον u και έχουμε ότι, αν ο $\epsilon > 0$ δεν υπερβαίνει την απόσταση του x από τον u, τότε η περιοχή $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ είναι ολόκληρη αριστερά του u.
Τέλος, αν $l < x < u$, ο $\min\{x - l, u - x\}$ είναι η απόσταση του x από τον κοντινότερο προς αυτόν από τους l, u. Άρα έχουμε ότι, αν ο $\epsilon > 0$ δεν υπερβαίνει την απόσταση του x από τον κοντινότερο προς αυτόν από τους l, u, τότε η περιοχή $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ είναι ολόκληρη ανάμεσα στους l, u.

Άσκηση 2.2.4. *Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Αποδείξτε ότι $\bigcap_{\epsilon>0} N_x(\epsilon) = \{x\}$ ή, με άλλα λόγια, το μοναδικό στοιχείο που ανήκει σε όλες τις περιοχές του x είναι το ίδιο το x.*

Λύση: Έχουμε ήδη πει ότι το x ανήκει σε όλες τις περιοχές του. Πάμε για το αντίστροφο.
Κατ' αρχάς, έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν ο y ανήκει σε όλες τις περιοχές του x, τότε ισχύει

$$|y - x| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } \epsilon > 0.$$

Συνεπάγεται

$$|y - x| \leq 0$$

και, επειδή $|y-x| \geq 0$, συμπεραίνουμε ότι $|y-x| = 0$, δηλαδή $y = x$. Άρα ο μοναδικός y που ανήκει σε όλες τις περιοχές του x είναι ο $y = x$.
Τώρα έστω $x = +\infty$. Αν ο *αριθμός* y ανήκει σε όλες τις περιοχές του $+\infty$, τότε ισχύει

$$y > \frac{1}{\epsilon} \qquad \text{για κάθε } \epsilon > 0$$

η, ισοδύναμα,

$$0 < \frac{1}{y} < \epsilon \qquad \text{για κάθε } \epsilon > 0.$$

Αυτό, όμως, είναι αδύνατο! Άρα το μοναδικό $y \in \overline{\mathbb{R}}$ που ανήκει σε όλες τις περιοχές του $+\infty$ είναι το $y = +\infty$.

Άσκηση 2.2.3. *Έστω $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ με $x \neq y$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_x(\epsilon) \cap N_y(\epsilon) = \emptyset$.*

Λύση: Θα δούμε μόνο την περίπτωση που οι x, y είναι και οι δύο αριθμοί. Ασχοληθείτε εσείς με τις άλλες περιπτώσεις.
Έστω, λοιπόν, $x, y \in \mathbb{R}$ και $x < y$ (η περίπτωση $y < x$ είναι προφανώς όμοια).
Για να είναι τα διαστήματα $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ και $(y-\epsilon, y+\epsilon)$ ξένα, αρκεί το δεξιό άκρο του πρώτου να είναι μικρότερο (με την ευρεία έννοια) από το αριστερό άκρο του δεύτερου: τότε το πρώτο διάστημα είναι αριστερά του δεύτερου. Δηλαδή, αρκεί να είναι

$$x + \epsilon \leq y - \epsilon$$

ή, ισοδύναμα,

$$\epsilon \leq \frac{y - x}{2}.$$

Άρα, αν πάρουμε $\epsilon = \frac{y-x}{2}$ (ή και οποιονδήποτε μικρότερο $\epsilon > 0$), τότε οι περιοχές $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ και $(y - \epsilon, y + \epsilon)$ είναι ξένες.

Σχόλιο: Αν $\epsilon = \frac{y-x}{2}$, τότε τα άκρα $x + \epsilon$ και $y - \epsilon$ ταυτίζονται με το μέσο $\frac{x+y}{2}$ του διαστήματος ανάμεσα στους x, y. Αν ο $\epsilon > 0$ είναι μικρότερος (με την ευρεία έννοια) από τον $\frac{y-x}{2}$, τότε η περιοχή $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ είναι αριστερά του $\frac{x+y}{2}$ και η $(y - \epsilon, y + \epsilon)$ είναι δεξιά του $\frac{x+y}{2}$, οπότε οι δυο περιοχές είναι ξένες. Αν ο ϵ είναι μεγαλύτερος από τον $\frac{y-x}{2}$, τότε οι περιοχές $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ και $(y - \epsilon, y + \epsilon)$ περιέχουν και οι δύο τον $\frac{x+y}{2}$ και δεν είναι ξένες.

Τα αποτελέσματα των προηγούμενων ασκήσεων μπορούμε να τα χρησιμοποιούμε ελεύθερα από τώρα και στο εξής.

Τώρα θα διατυπώσουμε τους ορισμούς των ορίων στη "γλώσσα" των περιοχών.

Αν ο x είναι αριθμός, τότε ο ορισμός του $x_n \to x$ είναι: "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$" και γράφεται ισοδύναμα "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$" ή, ισοδύναμα, "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$".
Στην περίπτωση $x = +\infty$, ο ορισμός του $x_n \to +\infty$ είναι: "για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$". Επομένως, αν θέσουμε $\epsilon = \frac{1}{M}$, τότε ο ορισμός γράφεται ισοδύναμα "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n > \frac{1}{\epsilon}$" ή, ισοδύναμα, "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in (\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$" ή, ισοδύναμα, "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_{+\infty}(\epsilon)$".
Το ίδιο και στην περίπτωση $x = -\infty$. Ο ορισμός του $x_n \to -\infty$ είναι: "για κάθε $M > 0$

ισχύει τελικά $x_n < -M$". Άρα, αν θέσουμε $\epsilon = \frac{1}{M}$, τότε ο ορισμός γράφεται ισοδύναμα "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n < -\frac{1}{\epsilon}$" ή, ισοδύναμα, "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in [-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$" ή, ισοδύναμα, "για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_{-\infty}(\epsilon)$".

Άρα σε κάθε περίπτωση, δηλαδή είτε το x είναι αριθμός είτε είναι $+\infty$ είτε είναι $-\infty$, ο ορισμός του ορίου

$$x_n \to x$$

γράφεται ισοδύναμα

$$\text{για κάθε } \epsilon > 0 \text{ ισχύει τελικά } x_n \in N_x(\epsilon).$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι στη "γλώσσα" των περιοχών οι τρεις ορισμοί ορίου διατυπώνονται ως *ένας ενιαίος ορισμός*. Προφανώς, αυτό είναι ένα πλεονέκτημα.

Και τώρα θα ασχοληθούμε με διάφορες ιδιότητες των ορίων.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν δυο ακολουθίες ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα, τότε είτε καμιά δεν έχει όριο είτε και οι δύο έχουν όριο και το όριο αυτό είναι το ίδιο και για τις δυο ακολουθίες.*

Αυτή είναι η Πρόταση 2.1 στο βιβλίο. Διαβάστε μόνοι σας την απόδειξη. Ας δούμε μια απλή και χρήσιμη εφαρμογή. Θεωρούμε μια ακολουθία (x_n)

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ \ldots$$

και σχηματίζουμε την ακολουθία (x_{n+3}), δηλαδή την

$$x_4, x_5, x_6, x_7, \ \ldots .$$

Είναι σαφές ότι η πρώτη ακολουθία από τον τέταρτο όρο της πέρα ταυτίζεται με την δεύτερη από τον πρώτο όρο της και πέρα. Άρα, αν η μια από τις ακολουθίες έχει κάποιο όριο, τότε και η άλλη έχει το ίδιο όριο.
Το ίδιο ισχύει αν πάρουμε την (x_{n+1}) ή την (x_{n+7}) ή, γενικά, οποιανδήποτε (x_{n+k}) αντί της (x_{n+3}). Αυτό που είπαμε τώρα εφαρμόζεται πολύ συχνά.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και αριθμοί u, l.*

[α] *Αν $l < x$, τότε ισχύει τελικά $l < x_n$.*

[β] *Αν $x < u$, τότε ισχύει τελικά $x_n < u$.*

[γ] *Αν $l < x < u$, τότε ισχύει τελικά $l < x_n < u$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε μια από τις προηγούμενες ασκήσεις. Η ιδέα είναι να πάρουμε μια περιοχή $N_x(\epsilon)$ η οποία να βρίσκεται στην ίδια μεριά σε σχέση με τους l, u (κατά περίπτωση) στην οποία βρίσκεται και ο x. Αν ο x είναι αριστερά του u, θέλουμε και η $N_x(\epsilon)$ να είναι αριστερά του u. Αν ο x είναι δεξιά του l, θέλουμε και η $N_x(\epsilon)$ να είναι δεξιά του l. Αν ο x είναι ανάμεσα στους l, u, θέλουμε και η $N_x(\epsilon)$ να είναι ανάμεσα στους l, u.
Ας δούμε συγκεκριμένα τί γίνεται στην περίπτωση [γ].
Αν $l < x < u$, θεωρούμε μια αρκετά μικρή περιοχή $N_x(\epsilon)$ (δηλαδή έναν αρκετά μικρό $\epsilon > 0$) η οποία να βρίσκεται ολόκληρη ανάμεσα στους l, u. (Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια τέτοια περιοχή του x.) Επειδή $x_n \to x$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$. Άρα ο x_n είναι τελικά ανάμεσα στους l, u.
Διατυπώστε ανάλογα τις περιπτώσεις [α], [β]. □

Παρατηρήστε ότι η τελευταία Πρόταση, δηλαδή η Πρόταση 2.2 του βιβλίου, μας λέει ότι *παίρνουμε πληροφορία για τους όρους μιας ακολουθίας αν έχουμε ανάλογη πληροφορία για το όριο της ακολουθίας.*

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ. *Αν μια ακολουθία έχει όριο, τότε αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω (για άτοπο) ότι $x_n \to x'$ και $x_n \to x''$ και $x' \neq x''$.
Γνωρίζουμε (από προηγούμενη σημερινή άσκηση) ότι υπάρχει αρκετά μικρός $\epsilon > 0$ ώστε οι περιοχές $N_{x'}(\epsilon)$ και $N_{x''}(\epsilon)$ να είναι ξένες. Θεωρούμε έναν τέτοιον ϵ.
Επειδή $x_n \to x'$, ισχύει τελικά $x_n \in N_{x'}(\epsilon)$.
Επειδή $x_n \to x''$, ισχύει τελικά $x_n \in N_{x''}(\epsilon)$.
Συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n \in N_{x'}(\epsilon)$ *και* $x_n \in N_{x''}(\epsilon)$. Δηλαδή, όλοι οι όροι x_n από κάποιον n_0 και πέρα ανήκουν ταυτόχρονα και στις δύο περιοχές $N_{x'}(\epsilon)$ και $N_{x''}(\epsilon)$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο διότι ο ϵ επιλέχθηκε ώστε οι δυο αυτές περιοχές να μην έχουν κανένα κοινό στοιχείο. □

Η επόμενη Πρόταση είναι η Πρόταση 2.4 του βιβλίου. Διαβάστε την αόδειξή της.

ΠΡΟΤΑΣΗ. [α] *Αν $x_n \to x \in \mathbb{R}$, τότε η (x_n) είναι φραγμένη.*

[β] *Αν $x_n \to +\infty$, τότε η (x_n) είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη.*

[γ] *Αν $x_n \to -\infty$, τότε η (x_n) είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη.*

Η επόμενη Πρόταση, δηλαδή η Πρόταση 2.5 του βιβλίου, μας λέει ότι *παίρνουμε πληροφορία για το όριο μιας ακολουθίας αν έχουμε ανάλογη πληροφορία για τους όρους της ακολουθίας.* Παρατηρήστε τη σχέση ανάμεσα σ' αυτήν την Πρόταση και σε μια προηγούμενη Πρόταση (η οποία μας δίνει "ανάποδη" πληροφορία και την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη αυτής της Πρότασης).

ΠΡΟΤΑΣΗ. [α] *Αν ισχύει $x_n \geq l$ για άπειρους n και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $x \geq l$.*

[β] *Αν ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους n και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $x \leq u$.*

[γ] *Αν $u < l$ και ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους n και $x_n \geq l$ για άπειρους n, τότε η (x_n) δεν έχει όριο.*

Απόδειξη. [α] Έστω ότι ισχύει $x_n \geq l$ για άπειρους n και ας υποθέσουμε (για άτοπο) ότι $x < l$.
Τότε, σύμφωνα με μια προηγούμενη Πρόταση, ισχύει τελικά $x_n < l$. Επομένως, ισχύει $x_n \geq l$ για το πολύ πεπερασμένους n και καταλήγουμε σε αντίφαση με το ότι ισχύει $x_n \geq l$ για άπειρους n.
Άρα $x \geq l$.

Η απόδειξη του [β] είναι παρόμοια.

[γ] Έστω $u < l$ και έστω ότι ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους n και $x_n \geq l$ για άπειρους n.
Υποθέτουμε (για άτοπο) ότι η (x_n) έχει όριο x.
Τότε, λόγω των [α] και [β], συνεπάγεται $x \leq u$ και $x \geq l$. Αλλά από τις $x \leq u$, $x \geq l$ και $u < l$ προκύπτει άτοπο. □

Ειδικά το μέρος [γ] της τελευταίας Πρότασης είναι πολύ χρήσιμο για να διακρίνουμε (και για να αποδείξουμε) ότι μια συγκεκριμένη ακολουθία δεν έχει όριο. Για παράδειγμα, η ακολουθία $\big((-1)^{n-1}\big)$, δηλαδή η

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots,$$

δεν έχει όριο διότι, προφανώς, έχει άπειρους όρους ≤ -1 και άπειρους όρους ≥ 1. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για την ακολουθία $\big((-1)^{n-1}n\big)$, δηλαδή την

$$1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, \ldots .$$

Κι αυτή δεν έχει όριο διότι έχει άπειρους όρους ≤ -1 και άπειρους όρους ≥ 1.