ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΕΙΚΟΣΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΑΘΗΜΑ, 26-11-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Άσκηση 8.2.5. *Εφαρμόστε το ολοκληρωτικό κριτήριο στις σειρές:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}.$$

Λύση: Στην πρώτη σειρά η ακολουθία των προσθετέων είναι φθίνουσα. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [1, +\infty)$ με τύπο

$$f(u) = \frac{1}{u^2+1}.$$

Η f είναι φθίνουσα και οι τιμές της στους φυσικούς ταυτίζονται με τους αντίστοιχους προσθετέους της σειράς, οπότε εξετάζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}\, du = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{u^2+1}\, du = \lim_{t\to+\infty} (\arctan t - \arctan 1) = \frac{\pi}{4} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} < +\infty.$$

Στην ίδια σειρά θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε και το κριτήριο σύγκρισης:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Όμως, στις επόμενες δυο σειρές αυτό δεν είναι τόσο εύκολο και το πιο απλό είναι να εφαρμόσουμε το ολοκληρωτικό κριτήριο.
Και στις δυο σειρές η ακολουθία των προσθετέων είναι φθίνουσα. Για την δεύτερη σειρά θεωρούμε την φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $[2, +\infty)$ με τύπο

$$f(u) = \frac{1}{u \log u}$$

και εξετάζουμε το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{1}{u \log u}\, du &= \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{u \log u}\, du = \lim_{t\to+\infty} \int_{\log 2}^{\log t} \frac{1}{y}\, dy \\ &= \lim_{t\to+\infty} \big(\log(\log t) - \log(\log 2) \big) = +\infty.\end{aligned}$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log n} = +\infty.$$

Για την τρίτη σειρά θεωρούμε την φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $[2, +\infty)$ με τύπο

$$f(u) = \frac{1}{u(\log u)^2}$$

και μελετάμε το γενικευμένο ολοκλήρωμά της:

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{1}{u(\log u)^2}\, du &= \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{u(\log u)^2}\, du = \lim_{t\to+\infty} \int_{\log 2}^{\log t} \frac{1}{y^2}\, dy \\ &= \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log t} \right) = \frac{1}{\log 2} < +\infty.\end{aligned}$$

Άρα
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} < +\infty.$$
Σχόλιο: Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^p},$$
όπου p είναι μια παράμετρος. Δοκιμάστε το. (Κατ' αρχάς θα πρέπει να διακρίνετε τις περιπτώσεις $p \leq 0$ και $p > 0$.)

Άσκηση 8.2.2. *Συγκρίνοντας με απλούστερες σειρές, μελετήστε τις*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\Big(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{e}-1), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(1-\cos\frac{1}{n}\Big).$$
Λύση: Στην πρώτη σειρά ο n-οστός όρος είναι στη μορφή
$$\log(1+x)$$
όπου ο $x = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ είναι ένας μικρός αριθμός ο οποίος τείνει στο 0.
Τώρα θυμόμαστε ένα όριο από τον απειροστικό λογισμό:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$
Επομένως,
$$\frac{\log(1+\frac{1}{n\sqrt{n}})}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} \to 1$$
και, επειδή $0 < 1 < +\infty$, η σειρά μας και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ συμπεριφέρονται ως προς την σύγκλιση με τον ίδιο τρόπο. Άρα, επειδή
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty,$$
(διότι $\frac{3}{2} > 1$) συνεπάγεται
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\Big(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big) < +\infty.$$
Με τον ίδιο τρόπο χειριζόμαστε και τις άλλες δυο σειρές. Για την δεύτερη σειρά έχουμε το όριο
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} e^x = 1,$$
οπότε
$$\frac{\sqrt[n]{e}-1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \to 1.$$

Άρα η σειρά μας και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ συμπεριφέρονται ως προς την σύγκλιση με τον ίδιο τρόπο. Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{e} - 1) = +\infty.$$

Για την τρίτη σειρά έχουμε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2},$$

οπότε

$$\frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \to \frac{1}{2}.$$

Επειδή $0 < \frac{1}{2} < +\infty$, η σειρά μας και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συμπεριφέρονται ως προς την σύγκλιση με τον ίδιο τρόπο. Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) < +\infty.$$

Σχόλιο: Τα τρία προηγούμενα όρια, ακόμη κι αν κάποιος δεν τα θυμάται, μπορεί να του έρθουν στο μυαλό αν σκεφτεί τις παρακάτω πολύ γνωστές σειρές Taylor:

$$\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{3!}\,x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,x^n$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{4!}\,x^4 - \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}.$$

Όταν ο x είναι πολύ κοντά στο 0, οι δυνάμεις του x με εκθέτη μεγαλύτερο του 1 είναι "αμελητέες" σε σχέση με το x, διότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^a}{x} = \lim_{x \to 0} x^{a-1} = 0 \qquad \text{όταν } a > 1.$$

Ομοίως, και οι δυνάμεις του x με εκθέτη μεγαλύτερο του 2 είναι "αμελητέες" σε σχέση με το x^2 όταν ο x είναι πολύ κοντά στο 0.
Άρα, παραλείποντας στις δυο πρώτες ισότητες τις δυνάμεις του x με εκθέτη μεγαλύτερο του 1 και στην τρίτη ισότητα τις δυνάμεις του x με εκθέτη μεγαλύτερο του 2, έχουμε, αντιστοίχως,

$$\log(1 + x) \sim x$$
$$e^x - 1 \sim x$$
$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}\,x^2$$

για x κοντά στο 0.

Τώρα θα αφήσουμε την ειδική περίπτωση των σειρών με μη-αρνητικούς προσθετέους και θα πάμε να δούμε μερικά κριτήρια σύγκλισης σειρών στην γενική περίπτωση.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ CAUCHY. *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει αν και μόνον αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* n_0 *τέτοιο ώστε να ισχύει*

$$|x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n| < \epsilon$$

για κάθε n, m *με* $n_0 \leq m < n$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα της σειράς με τον γνωστό τύπο

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n.$$

Τότε η σειρά συγκλίνει αν και μόνον αν η ακολουθία (s_n) συγκλίνει αν και μόνον αν η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy, το οποίο είναι εξ ορισμού ισοδύναμο με το ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε να ισχύει

$$|s_n - s_m| < \epsilon$$

για κάθε n, m με $n_0 \leq m < n$.
Και η απόδειξη τελειώνει αν σκεφτούμε ότι

$$s_n - s_m = (x_1 + \cdots + x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n) - (x_1 + \cdots + x_m) = x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n$$

όταν $m < n$. □

Λέμε ότι μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **συγκλίνει απολύτως** αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει.
Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ είναι σειρά με μη-αρνητικούς προσθετέους, γνωρίζουμε ότι συγκλίνει αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$. Άρα μπορούμε να πούμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνον αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$.

Παράδειγμα. Γνωρίζουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots$$

συγκλίνει. Όμως δεν συγκλίνει απολύτως. Πράγματι,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty.$$