ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΕΙΚΟΣΤΟ ΤΡΙΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 28-11-13

Μ. Παπαδημητράκης.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και*

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|.$$

Δεν θα παρουσιάσω την απόδειξη. Διαβάστε την στο βιβλίο.

Έχουμε, δηλαδή, την συνεπαγωγή

$$\text{απόλυτη σύγκλιση σειράς} \quad \Rightarrow \quad \text{σύγκλιση σειράς}$$

Όπως είδαμε στην προηγούμενη διάλεξη, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως. Άρα *δεν ισχύει το αντίστροφο του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης.*

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι ισχύει $|x_n| \leq y_n$ για κάθε n. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει. Επίσης, είναι*

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Απόδειξη. Από προηγούμενη Πρόταση για σειρές με μη-αρνητικούς προσθετέους και από το Κριτήριο Απόλυτης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει, οπότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, και

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι ισχύει $y_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η ακολουθία $\big(\frac{|x_n|}{y_n}\big)$ είναι φραγμένη (ή, ειδικώτερα, ότι συγκλίνει). Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει.*

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια μιας προηγούμενης Πρότασης για σειρές με μη-αρνητικούς προσθετέους και του Κριτηρίου Απόλυτης Σύγκλισης. □

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^3+2n^2+4}.$$

Βλέπουμε ότι η απόλυτη τιμή του n-οστού προσθετέου της σειράς είναι

$$\Big|(-1)^n \frac{n+1}{n^3+2n^2+4}\Big| = \frac{n+1}{n^3+2n^2+4}$$

και συμπεριφέρεται όπως ο λόγος $\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$.

Τώρα, βρίσκουμε ότι

$$\frac{|(-1)^n \frac{n+1}{n^3+2n^2+4}|}{\frac{1}{n^2}} = \frac{(n+1)n^2}{n^3+2n^2+4} \to 1.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η αρχική μας σειρά συγκλίνει απολύτως.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΛΟΓΟΥ. *Έστω $x_n \neq 0$ για κάθε n.*

(i) *Αν* $\overline{\lim} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$*, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει απολύτως.*

(ii) *Αν* $1 < \underline{\lim} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$*, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *αποκλίνει.*

(iii) *Αν* $\underline{\lim} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq 1 \leq \overline{\lim} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$*, τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα για τη σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΡΙΖΑΣ. (i) *Αν* $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$*, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει απολύτως.*

(ii) *Αν* $1 < \overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|}$*, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *αποκλίνει.*

(iii) *Αν* $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$*, τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα για τη σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε a τέτοιον ώστε

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} < a < 1.$$

Επειδή $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} < a$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|x_n|} \leq a$. Δηλαδή υπάρχει κάποιος n_0 ώστε να ισχύει $\sqrt[n]{|x_n|} \leq a$ ή, ισοδύναμα,

$$|x_n| \leq a^n$$

για κάθε $n \geq n_0$.
Επειδή $0 \leq a < 1$, η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a^n$ συγκλίνει, οπότε και η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει.

(ii) Επειδή $1 < \overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|}$, συνεπάγεται ότι ισχύει $1 \leq \sqrt[n]{|x_n|}$ ή, ισοδύναμα,

$$1 \leq |x_n|$$

για άπειρους n. Άρα δεν ισχύει $x_n \to 0$, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει.

(iii) Θεωρούμε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Με $x_n = \frac{1}{n}$ έχουμε

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$$

και, επομένως, $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$.
Ομοίως, με $x_n = \frac{1}{n^2}$ έχουμε

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1$$

και, επομένως, $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$.
Δηλαδή, έχουμε δυο σειρές που η μια αποκλίνει και η άλλη συγκλίνει παρά το ότι και για τις δυο σειρές ισχύει $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$. □

Δεν θα αποδείξουμε το κριτήριο λόγου. Η απόδειξή του είναι παρόμοια με την απόδειξη του κριτηρίου ρίζας αλλά λίγο πιο τεχνική.

Στην εφαρμογή των κριτηρίων λόγου και ρίζας σε συγκεκριμένες σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, τις περισσότερες φορές υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|}.$$

Τότε, όπως γνωρίζουμε είναι $\underline{\lim} = \overline{\lim} = \lim$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}.$$

Θα εφαρμόσουμε πρώτα το κριτήριο λόγου.
Αν $a=0$, η σειρά γράφεται $\sum_{n=1}^{+\infty} 0$ και, προφανώς, συγκλίνει απολύτως.
Αν $a \neq 0$, τότε με

$$x_n = \frac{a^n}{n}$$

έχουμε

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}}\right| = |a|\,\frac{n}{n+1} \to |a|.$$

Άρα, αν $0<|a|<1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a|>1$, η σειρά αποκλίνει.
Αν $|a|=1$, το κριτήριο λόγου δεν δίνει συμπέρασμα, οπότε μελετάμε τις σειρές που προκύπτουν σ'αυτήν την περίπτωση ανεξάρτητα από το κριτήριο λόγου.
Αν $a=1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει.
Αν $a=-1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, η οποία συγκλίνει (αλλά όχι απολύτως).
Τώρα θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας. Είναι

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n}\right|} = \frac{|a|}{\sqrt[n]{n}} \to |a|.$$

Από εδώ και πέρα τα συμπεράσματα είναι τα ίδια με τα συμπεράσματα του κριτηρίου λόγου.
Και με τα δυο κριτήρια, λοιπόν, καταλήγουμε στο ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $-1 \leq a < 1$ και συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν $-1<a<1$.

Παράδειγμα. Στη σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots$$

εφαρμόζουμε κατ'αρχάς το κριτήριο λόγου.
Αν $a=0$, η σειρά είναι η $1+0+0+\cdots$ και συγκλίνει απολύτως.
Αν $a \neq 0$, τότε με

$$x_n = \frac{a^n}{n!}$$

έχουμε

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}\right| = \frac{|a|}{n+1} \to 0 < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε a.
Η εφαρμογή του κριτηρίου ρίζας είναι πιο δύσκολη. Είναι

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n!}\right|} = \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} \to 0 < 1,$$

διότι μπορεί να αποδειχθεί ότι $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$. Αυτό το τελευταίο όριο δεν είναι τόσο εύκολο και δεν θα το αποδείξω εδώ. Μπορείτε να το διαβάσετε στο βιβλίο.
Άρα και με το κριτήριο ρίζας συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ συγκλίνει απολύτως για κάθε a.

Υπάρχει μια “άτυπη αρχή” που λέει ότι όταν ο n-οστός όρος μιας σειράς περιέχει παραγοντικά τότε συνήθως η εφαρμογή του κριτηρίου λόγου είναι πιο εύκολη από το κριτήριο ρίζας. Αυτό το είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, όπου ο υπολογισμός του ορίου που προκύπτει από το κριτήριο λόγου είναι πιο εύκολος από τον υπολογισμό του ορίου που προκύπτει από το κριτήριο ρίζας.

Παράδειγμα. Τώρα θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{a^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{a^2}{2!}+\frac{a^4}{4!}-\frac{a^6}{6!}+\frac{a^8}{8!}-\cdots.$$

Μπορούμε να γράψουμε αυτήν την σειρά στη μορφή

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x_n,$$

όπου ο n-οστός προσθετέος έχει τύπο

$$x_n=\begin{cases}0, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός}\\ (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{a^n}{n!}, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος}\end{cases}$$

Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου, διότι υπάρχουν (άπειροι) προσθετέοι ίσοι με 0.
Για το κριτήριο ρίζας έχουμε

$$\sqrt[n]{|x_n|}=\begin{cases}0, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός}\\ \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}}, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος}\end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας το όριο $\sqrt[n]{n!}\to+\infty$ που είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, βλέπουμε ότι η υποακολουθία των άρτιων δεικτών της $\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right)$ συγκλίνει στο 0. Η υποακολουθία των περιττών δεικτών συγκλίνει κι αυτή στο 0, οπότε

$$\sqrt[n]{|x_n|}\to 0<1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε a.

Παράδειγμα. Τέλος, θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a^{2k-1}}{2k-1}=a+\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}+\frac{a^7}{7}+\cdots.$$

Κι αυτήν την σειρά μπορούμε να την γράψουμε στη μορφή

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x_n,$$

όπου ο n-οστός προσθετέος έχει τύπο

$$x_n=\begin{cases}0, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος}\\ \frac{a^n}{n}, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός}\end{cases}$$

Πάλι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου, διότι υπάρχουν (άπειροι) προσθετέοι ίσοι με 0.
Για το κριτήριο ρίζας έχουμε

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ \frac{|a|}{\sqrt[n]{n}}, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

Τώρα, η υποακολουθία των άρτιων δεικτών της $\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right)$ συγκλίνει στο 0 και η υποακολουθία των περιττών δεικτών συγκλίνει στο $|a|$. Επειδή $0 \leq |a|$, συνεπάγεται ότι

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} = |a|.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως αν $|a| < 1$ και αποκλίνει αν $|a| > 1$.
Την περίπτωση $|a| = 1$ την εξετάζουμε ανεξάρτητα από το κριτήριο ρίζας.
Αν $a = 1$, η σειρά είναι η

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots .$$

Με ένα απλό κόλπο *σύγκρισης* θα αναγάγουμε αυτήν την σειρά στην αρμονική σειρά:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\Big) = +\infty.$$

(Αυξάνουμε κάθε παρονομαστή της αρχικής σειράς κατά 1.)
Άρα η σειρά αποκλίνει όταν $a = 1$.
Το ίδιο ισχύει για $a = -1$, διότι τότε η σειρά είναι η

$$-1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \cdots = -\Big(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots\Big) = -\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει (απολύτως) αν και μόνο αν $-1 < a < 1$.