ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΔΕΚΑΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 29-10-13

Μ. Παπαδημητράκης.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν ισχύει $x_n \leq y_n$ για άπειρους n και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $x \leq y$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε (για άτοπο) ότι $y < x$.
Γνωρίζουμε ότι υπάρχει κάποιος αρκετά μικρός $\epsilon > 0$ ώστε η περιοχή $N_y(\epsilon)$ να είναι αριστερά της περιοχής $N_x(\epsilon)$. Θεωρούμε, λοιπόν, έναν τέτοιον ϵ.
Επειδή $x_n \to x$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$ και, επειδή $y_n \to y$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $y_n \in N_y(\epsilon)$. Άρα ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$ και $y_n \in N_y(\epsilon)$. Άρα, αφού η $N_y(\epsilon)$ είναι αριστερά της $N_x(\epsilon)$, ισχύει τελικά $y_n < x_n$. Άρα ισχύει $x_n \leq y_n$ για το πολύ πεπερασμένους n και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού η υπόθεση της πρότασης είναι ότι ισχύει $x_n \leq y_n$ για άπειρους n. □

Η τελευταία Πρόταση (η 2.6 του βιβλίου) χρειάζεται λίγη προσοχή στην εφαρμογή της σε κάποια ειδική περίπτωση. Αν οι υποθέσεις της Πρότασης ισχύουν σε μια ισχυρότερη μορφή, δηλαδή αν ισχύουν οι $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$ και ισχύει και η *γνήσια* ανισότητα $x_n < y_n$ για άπειρους n, τότε *δεν* παίρνουμε το ισχυρότερο συμπέρασμα $x < y$. Θα πάρουμε το ίδιο συμπέρασμα $x \leq y$. Αυτό φαίνεται στο εξής παράδειγμα. Ισχύει $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ για άπειρους n (και μάλιστα, για κάθε n) και οι δυο ακολουθίες έχουν το ίδιο όριο 0: μπορούμε να γράψουμε $0 \leq 0$ αλλά όχι $0 < 0$.

Μέχρι τώρα είδαμε μια κατηγορία προτάσεων όπου γνωρίζουμε πληροφορία για το όριο ακολουθίας (ή ακολουθιών) και βγάζουμε συμπέρασμα για τους όρους της ακολουθίας και μια άλλη κατηγορία προτάσεων όπου έχουμε πληροφορία για τους όρους μιας ακολουθίας και βγάζουμε συμπέρασμα για το όριό της. Σε όλα αυτά γνωρίζουμε ότι η ακολουθία *έχει* όριο. Τώρα θα δούμε μια τρίτη κατηγορία προτάσεων όπου δεν γνωρίζουμε αν μια ακολουθία έχει όριο και, με διάφορες υποθέσεις, βγάζουμε συμπέρασμα ότι η ακολουθία έχει όριο και το υπολογίζουμε.

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Έστω ότι ισχύει τελικά $x_n \leq y_n$.*

[α] *Αν $x_n \to +\infty$, τότε $y_n \to +\infty$.*

[β] *Αν $y_n \to -\infty$, τότε $x_n \to -\infty$.*

Αυτή είναι η Πρόταση 2.7 του βιβλίου και μπορείτε να διαβάσετε την απόδειξη εκεί. Θα πω μόνο ότι η Πρόταση αυτή φαίνεται απολύτως "λογική". Αν οι x_n απομακρύνονται απεριόριστα προς τα δεξιά (αυτό σημαίνει το $x_n \to +\infty$) και αν οι y_n είναι πιο δεξιά (με την ευρεία έννοια) από τους αντίστοιχους x_n, τότε είναι προφανές ότι και οι y_n απομακρύνονται απεριόριστα προς τα δεξιά.

Η επόμενη είναι η Πρόταση 2.8 του βιβλίου.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ. *Έστω ότι ισχύει τελικά $x_n \leq y_n \leq z_n$. Αν $x_n \to a$ και $z_n \to a$, τότε $y_n \to a$.*

Απόδειξη. Η περίπτωση $a = +\infty$ είναι απλή: από το ότι $x_n \to +\infty$ και από την ανισότητα $x_n \leq y_n$ (και χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $y_n \leq z_n$) και από την προηγούμενη Πρόταση συνεπάγεται $y_n \to +\infty$. Το ίδιο και στην περίπτωση $a = -\infty$.
Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a \in \mathbb{R}$.
Έστω $\epsilon > 0$. (Πρέπει να έχει γίνει φανερό τώρα πια ότι αρχίζουμε με την έκφραση "έστω $\epsilon > 0$" όταν θέλουμε να αποδείξουμε κάτι για κάθε $\epsilon > 0$.)
Επειδή $x_n \to a$, ισχύει τελικά $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ και, επειδή $z_n \to a$, ισχύει τελικά $z_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Άρα ισχύει τελικά $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ και $z_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$.

Άρα ισχύει τελικά $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ και $z_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ και $x_n \leq y_n \leq z_n$.
Τώρα σκεφτόμαστε ότι το σύνολο $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ είναι *διάστημα* και ότι ως διάστημα έχει μια πολύ χαρακτηριστική ιδιότητα: αν πάρουμε δυο οποιαδήποτε στοιχεία ενός διαστήματος, τότε ό,τι είναι ανάμεσα σ' αυτά τα δυο στοιχεία είναι κι αυτό στοιχείο του ίδιου διαστήματος. (Προσέξτε: αυτό δεν ισχύει αν το σύνολο δεν είναι διάστημα.)
Άρα ισχύει τελικά $y_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $y_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Άρα $y_n \to a$. □

Η ιδιότητα παρεμβολής φαίνεται κι αυτή "λογική". Αν ο y_n είναι ανάμεσα στους x_n, z_n και αυτοί πλησιάζουν τον αριθμό a, τότε και ο y_n "αναγκάζεται" να πλησιάζει τον ίδιο a.

Στο ίδιο πλαίσιο (αυτό της εύρεσης του ορίου μιας ακολουθίας) βρίσκονται και οι λεγόμενοι **αλγεβρικοί κανόνες** ορίων. Εδώ θα αποδείξω μόνο τον **κανόνα αθροίσματος** για να δούμε την ιδέα αυτής της απόδειξης. Παρόμοιες είναι και οι αποδείξεις των άλλων κανόνων: σε κάθε περίπτωση η βασική ιδέα είναι ίδια και μόνο οι τεχνικές λεπτομέρειες αλλάζουν. Τους αλγεβρικούς κανόνες και τις αποδείξεις τους θα διαβάσετε στην Πρόταση 2.9 του βιβλίου.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ. *Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν το $x+y$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή $(+\infty)+(-\infty)$ ή $(-\infty)+(+\infty)$), τότε*

$$x_n + y_n \to x + y.$$

Απόδειξη. Και πάλι θα περιοριστούμε στην περίπτωση που και τα δυο όρια x, y είναι αριθμοί.
Θέλουμε, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι $x_n + y_n \to x + y$.
Έστω $\epsilon > 0$.
Πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει τελικά

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| < \epsilon.$$

Ανοίγει παρένθεση συλλογισμών για να δούμε πώς θα πετύχουμε τον σκοπό μας.
Σκεφτόμαστε ότι δεν γνωρίζουμε (ακόμη) κάτι για την παράσταση $|(x_n+y_n)-(x+y)|$ αλλά *γνωρίζουμε* κάτι για τις παραστάσεις $|x_n - x|$ και $|y_n - y|$, αφού γνωρίζουμε ότι $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να συσχετίσουμε την παράσταση $|(x_n+y_n)-(x+y)|$ με τις $|x_n-x|$ και $|y_n-y|$ ώστε να βγάλουμε συμπέρασμα για την πρώτη από πληροφορία που έχουμε για τις άλλες δύο. Αυτό είναι αλγεβρικά απλό:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|.$$

Και τώρα σκεφτόμαστε ότι, αν έχουμε μια ποσότητα την οποία θέλουμε να κάνουμε $< \epsilon$ και γνωρίζουμε μια μεγαλύτερη (με την ευρεία έννοια) ποσότητα, τότε αρκεί να κάνουμε αυτήν την δεύτερη ποσότητα $< \epsilon$. Θα προσπαθήσουμε, επομένως, να δούμε αν ισχύει τελικά $|x_n - x| + |y_n - y| < \epsilon$. Και τώρα σκεφτόμαστε (πολλή σκέψη!!) ότι αν θέλουμε να κάνουμε το άθροισμα δυο αριθμών $< \epsilon$ αρκεί να κάνουμε καθέναν από αυτούς $< \frac{\epsilon}{2}$. Και πάλι σκέψη: μπορούμε να πετύχουμε να ισχύει τελικά $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$; Μα αυτή ακριβώς είναι η πληροφορία που λέγαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι έχουμε για τις $|x_n - x|$ και $|y_n - y|$ και που μας έκανε να θέλουμε να συσχετίσουμε την $|(x_n+y_n)-(x+y)|$ με τις $|x_n-x|$ και $|y_n-y|$. Η πληροφορία αυτή βγαίνει από το ότι $x_n \to x$ και $y_n \to y$.

Κλείνει η παρένθεση συλλογισμών και καταστρώνουμε με "αντίστροφους συλλογισμούς" την απόδειξή μας.
Έστω $\epsilon > 0$.
Πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει τελικά

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| < \epsilon.$$

Επειδή $x_n \to x$, ισχύει τελικά $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ και, επειδή $y_n \to y$, ισχύει τελικά $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$. Άρα ισχύει τελικά $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$. Άρα (προσθέτοντας κατά μέλη) ισχύει τελικά

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Αποδείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|(x_n + y_n) - (x + y)| < \epsilon$ και, επομένως, $x_n + y_n \to x + y$. □

Διαβάστε προσεκτικά τα παραδείγματα της ενότητας 2.3 του βιβλίου. Τα όρια πολυωνυμικών και ρητών παραστάσεων του n είναι ήδη γνωστά και αποδεικνύονται βάσει των διαφόρων ιδιοτήτων που μάθαμε. Δυο επίσης χρήσιμα όρια είναι τα

$$\sqrt[n]{a} \to 1, \qquad \sqrt[n]{n} \to 1.$$

(Το a είναι ένας σταθερός θετικός αριθμός.) Δείτε τις αποδείξεις τους στο βιβλίο.

Θα πω μόνο δυο λόγια για το πολύ σημαντικό παράδειγμα της **γεωμετρικής προόδου**, δηλαδή της ακολουθίας (a^n) όπου ο a είναι ένας σταθερός αριθμός. Η πιο βασική περίπτωση είναι όταν $a > 1$ και θα επικεντρωθώ σ' αυτήν. Τα υπόλοιπα διαβάστε τα στο βιβλίο. Έστω λοιπόν $a > 1$. Θα χρησιμοποιήσουμε την λεγόμενη

Ανισότητα του Bernoulli : $\qquad (x + 1)^n \geq nx + 1 \qquad$ για $x \geq -1$ και $n \in \mathbb{N}$.

Η ανισότητα αυτή αποδεικνύεται πολύ εύκολα με επαγωγή ως προς τον n (το x θεωρείται σταθερό). Κάντε το. Τώρα χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Bernoulli με $x = a - 1$ το οποίο είναι > 0 διότι $a > 1$ και έχουμε ότι ισχύει

$$a^n \geq n(a - 1) + 1$$

για κάθε n. Επειδή $a - 1 > 0$, έχουμε $n(a - 1) + 1 \to +\infty$ και, επομένως, $a^n \to +\infty$. Το πλήρες αποτέλεσμα είναι

$$a^n \begin{cases} \to +\infty, & \text{αν } a > 1 \\ \to 1, & \text{αν } a = 1 \\ \to 0, & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } a \leq -1 \end{cases}$$

Και το τελευταίο που θα δούμε σήμερα είναι μια τεχνική που εφαρμόζεται σε κάποιες "δύσκολες" περιπτώσεις που δεν εφαρμόζονται οι συνηθισμένες ιδιότητες.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΛΟΓΟΥ. *Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n.*

[α] *Αν $0 < b < 1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq b$, τότε $x_n \to 0$.*

[β] *Αν $b > 1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq b$, τότε $x_n \to +\infty$.*

[γ] *Αν $0 \leq a < 1$ και αν $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$, τότε $x_n \to 0$.*

[δ] *Αν $a > 1$ και αν $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$, τότε $x_n \to +\infty$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το [β] και το σχετικό με αυτό [δ]. Τα [α] και [γ] δείτε τα στο βιβλίο.

[β] Εύκολα παρατηρούμε ότι, επειδή $b > 1$ και $x_n > 0$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_{n+1} \geq bx_n > x_n$, οπότε η (x_n) είναι τελικά γνησίως αύξουσα. Αυτό από μόνο του δεν αρκεί για να συμπεράνουμε ότι η (x_n) έχει όριο $+\infty$. Υπάρχουν γνησίως αύξουσες ακολουθίες που δεν έχουν όριο $+\infty$. Για παράδειγμα, η ακολουθία $(2-\frac{1}{n})$ είναι γνησίως αύξουσα (και έχει όλους τους όρους της > 0) και έχει όριο 2. Αυτό που θα καθορίσει ότι η (x_n) έχει όριο $+\infty$ είναι ότι, όπως θα δούμε, η (x_n) αυξάνεται με τουλάχιστον τον "ίδιο ρυθμό" που αυξάνεται μια συγκεκριμένη γεωμετρική πρόοδος με λόγο > 1. Πράγματι:

η υπόθεση είναι ότι ο λόγος δυο διαδοχικών όρων της (x_n) είναι τουλάχιστον b και σκεφτείτε ότι ο λόγος δυο διαδοχικών όρων της γεωμετρικής προόδου (b^n) είναι b.

Οπότε σκεφτόμαστε ως εξής.
Υπάρχει κάποιος n_0 ώστε να ισχύει

$$x_{n+1} \geq bx_n$$

για κάθε $n \geq n_0$.
Άρα ισχύουν διαδοχικά τα εξής (σε κάθε επόμενη γραμμή θα χρησιμοποιούμε την ανισότητα της προηγούμενης γραμμής πολλαπλασιασμένη με b):

$$x_{n_0+1} \geq bx_{n_0}$$

$$x_{n_0+2} \geq bx_{n_0+1} \geq b^2 x_{n_0}$$

$$x_{n_0+3} \geq bx_{n_0+2} \geq b^3 x_{n_0}$$

κλπ.
Άρα με επαγωγή βλέπουμε ότι ισχύει

$$x_{n_0+k} \geq b^k x_{n_0}$$

για κάθε $k \geq 0$ και, γράφοντας $n_0 + k = n$, έχουμε ότι ισχύει

$$x_n \geq b^{n-n_0} x_{n_0} = \frac{x_{n_0}}{b^{n_0}}\, b^n$$

για κάθε $n \geq n_0$.
Δηλαδή ισχύει τελικά

$$x_n \geq \frac{x_{n_0}}{b^{n_0}}\, b^n.$$

Έχουμε δηλαδή "σύγκριση" της (x_n) με την γεωμετρική πρόοδο (b^n).
Τώρα ο αριθμός $\frac{x_{n_0}}{b^{n_0}}$ είναι σταθερός (δεν εξαρτάται από τον n) και $b^n \to +\infty$ διότι $b > 1$. Άρα

$$\frac{x_{n_0}}{b^{n_0}}\, b^n \to +\infty,$$

οπότε

$$x_n \to +\infty.$$

[δ] Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε αριθμό b ώστε $1 < b < a$. (Για παράδειγμα τον $b = \frac{1+a}{2}$.)
Επειδή $a > b$ και επειδή $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$, ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq b$. Επειδή $b > 1$, από το [β] συνεπάγεται $x_n \to +\infty$. □

Δυο σχετικά παραδείγματα εφαρμογής του κριτηρίου λόγου είναι τα εξής.

Παράδειγμα. Αν $a > 1$ και ο k είναι ένας σταθερός (δηλαδή ανεξάρτητος του n) φυσικός αριθμός, τότε

$$\frac{a^n}{n^k} \to +\infty.$$

Ο κανόνας λόγου δεν εφαρμόζεται διότι καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και, επίσης, δεν μπορούμε να απλοποιήσουμε τον τύπο $x_n = \frac{a^n}{n^k}$ της ακολουθίας. Όμως, βλέπουμε ότι

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^k}}{\frac{a^n}{n^k}} = a\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^k \to a\,1^k = a$$

και ότι $a > 1$.
Άρα $x_n \to +\infty$.

Παράδειγμα. Αν $a > 1$, τότε

$$\frac{a^n}{n!} \to 0.$$

Πάλι ο κανόνας λόγου δεν εφαρμόζεται διότι καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και, επίσης, δεν απλοποιείται ο τύπος $x_n = \frac{a^n}{n!}$ της ακολουθίας. Όμως,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1} \to 0$$

και $0 < 1$.
Άρα $x_n \to 0$.

Σχόλιο 1: Προσέξτε όταν εφαρμόζετε το κριτήριο λόγου σε κάποια ακολουθία (x_n) να βλέπετε πρώτα ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n. Το κριτήριο λόγου διατυπώνεται και χωρίς αυτήν την υπόθεση, αλλά είναι λίγο πιο περίπλοκο.

Σχόλιο 2: Ειδικές περιπτώσεις των δυο τελευταίων παραδειγμάτων είναι τα όρια

$$\frac{2^n}{n^{10}} \to +\infty \qquad \text{και} \qquad \frac{10^n}{n!} \to 0.$$

Παρατηρήστε πώς "ξεγελούν" οι αρχικοί όροι των δυο ακολουθιών. Αν δείτε τους αρχικούς όρους

$$\frac{2^1}{1^{10}} = 2, \qquad \frac{2^2}{2^{10}} = 0.0039\ldots, \qquad \frac{2^3}{3^{10}} = 0.00013\ldots \qquad \text{κλπ}$$

της πρώτης ακολουθίας θα φανταστείτε ότι είναι φθίνουσα και αν δείτε τους αρχικούς όρους

$$\frac{10^1}{1!} = 10, \qquad \frac{10^2}{2!} = 50, \qquad \frac{10^3}{3!} = 166.6\ldots \qquad \text{κλπ}$$

της δεύτερης ακολουθίας θα φανταστείτε ότι είναι αύξουσα. Μάλιστα, πιθανόν να σκεφτείτε ότι η πρώτη έχει όριο 0 και η δεύτερη $+\infty$.