ΑΝΑΛΥΣΗ 1

ΕΙΚΟΣΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ ΜΑΘΗΜΑ, 29-11-13

Μ. Παπαδημητράκης.

Εκτός από το κριτήριο του Cauchy, όλα τα άλλα κριτήρια σύγκλισης μιας σειράς που είδαμε μέχρι τώρα (απόλυτης σύγκλισης, σύγκρισης δυο σειρών, λόγου, ρίζας) χρησιμεύουν για να αποδείξουν ότι μια σειρά *συγκλίνει απολύτως* και, επομένως, συγκλίνει. Με άλλα λόγια, αν αντιμετωπίζουμε μια σειρά η οποία *δεν συγκλίνει απολύτως* (και δεν το γνωρίζουμε), τότε τα κριτήρια αυτά δεν θα βοηθήσουν διότι θα αποδεικνύουν ότι η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως. Υπάρχει, όμως, περίπτωση η σειρά να συγκλίνει παρά το ότι δεν συγκλίνει απολύτως. Δηλαδή, αν μια σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη, κανένα από αυτά τα κριτήρια δεν θα μας πει ότι η σειρά συγκλίνει.

Υπάρχουν, όμως, τα επόμενα δυο κριτήρια ειδικά για σειρές που συγκλίνουν υπό συνθήκη.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ DIRICHLET. *Έστω ακολουθίες (a_n), (b_n) και $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ τα μερικά αθροίσματα της πρώτης. Αν η (b_n) είναι φθίνουσα, αν $b_n \to 0$ και αν η (s_n) είναι φραγμένη, τότε η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots$$

συγκλίνει.

Δεν θα αποδείξω το κριτήριο του Dirichlet. Επίσης, δεν θα αναφέρω το κριτήριο του Abel, παρόμοιο με το κριτήριο του Dirichlet. Όλα αυτά μπορείτε να τα διαβάσετε στο βιβλίο. Θα αποδείξω, όμως, το επόμενο χρήσιμο πόρισμα του κριτηρίου του Dirichlet.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΩΝ ΠΡΟΣΗΜΩΝ. *Αν η ακολουθία (b_n) είναι φθίνουσα και $b_n \to 0$, τότε η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$$

συγκλίνει.

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Dirichlet χρησιμοποιώντας την ακολουθία (a_n) με τύπο

$$a_n = (-1)^{n-1}.$$

Τότε τα μερικά αθροίσματα της (a_n) είναι

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 - 1 = 0 \\ s_3 &= 1 - 1 + 1 = 1 \\ s_4 &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

και γενικά

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ 1, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

Άρα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της (a_n) είναι φραγμένη, οπότε βάσει του κριτηρίου του Dirichlet η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα. Τυπικά παραδείγματα είναι οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots .$$

Αν $p \leq 0$, ο n-οστός προσθετέος δεν τείνει στο 0, οπότε η σειρά αποκλίνει.
Αν $0 < p$, η ακολουθία με n-οστό όρο $b_n = \frac{1}{n^p}$ είναι προφανώς φθίνουσα και τείνει στο 0. Άρα στην περίπτωση αυτή η σειρά συγκλίνει.
Από την άλλη μεριά, για να εξετάσουμε την απόλυτη σύγκλιση της σειράς πρέπει να θεωρήσουμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\Big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots .$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι η σειρά αυτή αποκλίνει αν $p \leq 1$ και συγκλίνει αν $1 < p$.
Άρα το συμπέρασμα είναι ότι

$$\text{Η σειρά } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \begin{cases} \text{αποκλίνει,} & \text{αν } p \leq 0 \\ \text{συγκλίνει υπό συνθήκη,} & \text{αν } 0 < p \leq 1 \\ \text{συγκλίνει απολύτως,} & \text{αν } 1 < p \end{cases}$$

Για παράδειγμα, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots .$$

συγκλίνει υπό συνθήκη.

Άσκηση 8.3.1. *Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου στις σειρές*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n (n+1)!}{n^n}.$$

Λύση: Για την πρώτη σειρά γράφουμε τον n-οστό όρο και τον επόμενό του:

$$x_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}, \qquad x_{n+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)(3n+2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)(4n+1)}.$$

Επομένως,

$$\Big|\frac{x_{n+1}}{x_n}\Big| = \frac{3n+2}{4n+1} \to \frac{3}{4} < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει (απολύτως).
Ομοίως, για την δεύτερη σειρά με

$$x_n = \frac{e^n (n+1)!}{n^n}, \qquad x_{n+1} = \frac{e^{n+1} (n+2)!}{(n+1)^{n+1}}$$

έχουμε

$$\Big|\frac{x_{n+1}}{x_n}\Big| = e\, \frac{(n+2)!n^n}{(n+1)!(n+1)^{n+1}} = e\, \frac{(n+2)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = e\, \frac{n+2}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \to e \cdot 1 \cdot \frac{1}{e} = 1.$$

Άρα το κριτήριο λόγου δεν δίνει συμπέρασμα για τη σύγκλιση της σειράς.

Άσκηση 8.3.2. *Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας στις σειρές*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}.$$

Λύση: Για την πρώτη σειρά έχουμε

$$\sqrt[n]{|n^2|} = \big(\sqrt[n]{n}\big)^2 \to 1,$$

οπότε το κριτήριο ρίζας δεν δίνει συμπέρασμα. Βέβαια, μπορούμε να δούμε πολύ εύκολα ότι η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$, διότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \geq \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Για τη δεύτερη σειρά έχουμε

$$\sqrt[n]{\Big|\frac{n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}\Big|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}+1} \to \frac{1}{2} < 1.$$

Άρα αυτή η σειρά συγκλίνει (απολύτως).

Άσκηση 8.3.4. *Εξετάστε ως προς την σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις σειρές*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\log n}, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(\log n)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sin\frac{1}{n}.$$

Λύση: Η πρώτη σειρά δεν συγκλίνει απολύτως, διότι γνωρίζουμε από προηγούμενη άσκηση ότι

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \Big|\frac{(-1)^{n-1}}{n\log n}\Big| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n} = +\infty.$$

Όμως, η σειρά συγκλίνει βάσει του κριτηρίου εναλλασσόμενων προσήμων, διότι η ακολουθία $\left(\frac{1}{n\log n}\right)$ είναι φθίνουσα και τείνει στο 0.

Σχόλιο: Αν δεν μας ζητούσαν να εξετάσουμε τη σειρά ως προς την απόλυτη σύγκλιση, τότε θα εφαρμόζαμε χωρίς χρονοτριβή το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων και θα βλέπαμε αμέσως ότι η σειρά συγκλίνει. Από την άλλη μεριά, αν φαίνεται αμέσως ότι μια σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε δεν χάνουμε τίποτα να πούμε ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως και, επομένως, ότι συγκλίνει. Βέβαια, για την συγκεκριμένη σειρά καθώς και για την επόμενη δεν είναι εύκολο να αποφασίσουμε αμέσως για την απόλυτη σύγκλισή τους. Αυτό είχε γίνει σε προηγούμενη άσκηση μέσω του ολοκληρωτικού κριτηρίου.

Η δεύτερη σειρά συγκλίνει απολύτως, διότι (πάλι από προηγούμενη άσκηση)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \Big|\frac{(-1)^{n-1}}{n(\log n)^2}\Big| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει. Αυτό το τελευταίο φαίνεται και ανεξάρτητα από το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης. Σύμφωνα με το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων η σειρά

συγκλίνει, διότι η ακολουθία $(\frac{1}{n(\log n)^2})$ είναι φθίνουσα και τείνει στο 0.
Η τρίτη σειρά δεν συγκλίνει απολύτως, διότι από προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big|(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}\Big| = \sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{n} = +\infty.$$

Η σειρά όμως συγκλίνει, διότι η ακολουθία $(\sin\frac{1}{n})$ είναι φθίνουσα και τείνει στο 0. Το ότι είναι φθίνουσα ισχύει διότι η συνάρτηση $\sin x$ είναι αύξουσα στο διάστημα $[0,\frac{\pi}{2}]$ στο οποίο ανήκουν όλοι οι αριθμοί $\frac{1}{n}$. Πράγματι,

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \sin\frac{1}{n+1} < \sin\frac{1}{n}.$$

Άσκηση 8.3.5. *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση την σειρά*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2+(-1)^n)n}.$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής $2+(-1)^n$ του n στον παρονομαστή του n-οστού όρου είναι ίσος με 1 όταν ο n είναι περιττός και ίσος με 3 αν ο n είναι άρτιος. Δηλαδή η σειρά γράφεται

$$\frac{1}{1\cdot 1}-\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 5}-\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{1\cdot 7}-\frac{1}{3\cdot 8}+\cdots.$$

Κατ' αρχάς η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως. Ο πιο απλός τρόπος να το δούμε είναι να συγκρίνουμε την σειρά με τα απόλυτα με την αρμονική σειρά, μικραίνοντας τους προσθετέους: κάθε παρονομαστής είναι n ή $3n$ και είναι μικρότερος (με την ευρεία έννοια) από $3n$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big|\frac{(-1)^{n-1}}{(2+(-1)^n)n}\Big| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2+(-1)^n)n} \geq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$$

Τώρα, για να εφαρμόσουμε το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων στην σειρά πρέπει να δούμε αν η ακολουθία με n-οστό όρο

$$b_n = \frac{1}{(2+(-1)^n)n}$$

είναι φθίνουσα και τείνει στο 0.
Το ότι η ακολουθία τείνει στο 0 είναι εύκολο να το δούμε: πάλι, επειδή κάθε παρονομαστής είναι n ή $3n$, έχουμε

$$0 \leq b_n \leq \frac{1}{n}$$

και, επομένως, $b_n \to 0$.
Όμως, η ακολουθία *δεν* είναι (τελικά) φθίνουσα. Αυτό το υποψιαζόμαστε από τους αρχικούς όρους και το βλέπουμε παρατηρώντας τρεις διαδοχικούς όρους:

$$b_{2k} < b_{2k+1} > b_{2k+2}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με

$$\frac{1}{6k} < \frac{1}{2k+1} > \frac{1}{6k+6}.$$

Άρα δεν εφαρμόζεται το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.
Τώρα, αποδεικνύεται ότι η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$. *Μπορείτε να το αποδείξετε;*